SOLUCIONES

# DOSSIER SEMANAL 08

*MATEMÁTICAS II*

*Por Pedro A. Martínez*

**PROBLEMA 1**: **Realiza un esquema o "*visual thinking*"** donde se contemplen todos los aspectos trabajados en el bloque de álgebra.

En esta actividad se valorará el contenido y la creatividad. En cuanto al contenido se prestará atención a la inclusión de los siguientes puntos:

1. **¿Qué es una matriz?**
   a. Dimensión de una matriz
   b. Tipos de matrices
2. **Operaciones con matrices:**
   a. **Suma/resta de matrices**
      i. ¿Cuándo puedo hacer la operación?
      ii. ¿Cómo hacer la operación?
   b. **Producto de una matriz por un escalar**
      i. ¿Cuándo puedo hacer la operación?
      ii. ¿Cómo hacer la operación?
   c. **Producto de dos matrices**
      i. ¿Cuándo puedo hacer la operación?
      ii. ¿Cómo hacer la operación?
      iii. Propiedades del producto de matrices
   d. **Potencias de matrices**
      i. Método de inducción
   e. **Traspuesta de una matriz**
      i. ¿Cuándo puedo hacer la operación?
      ii. ¿Cómo hacer la operación?
      iii. Propiedades de la traspuesta
   f. **Inversa de una matriz**

i. Definición de inversa de una matriz
ii. ¿Cuándo tiene inversa una matriz?
iii. Calcular la inversa:
    1. Por definición
    2. Por el método de Gauss-Jordan
    3. Por el método de Adjuntos
iv. Propiedades de la inversa

3. **Determinantes**
    a. Método de Sarrus
    b. Método de adjuntos
    c. Método de Chío (consiguiendo ceros)
    d. Propiedades de los determinantes
4. **Rango de una matriz**
    a. Definición de rango
    b. Cálculo del rango
        i. Usando el método de Gauss
        ii. Usando determinantes
5. **Ecuaciones matriciales**
6. **Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones**
    a. Tipología de sistemas (compatible determinado, complatible indeterminado e incompatible)
    b. **Teorema de Rouchè-Fröbenius**
    c. Regla de **Cramer** (para sistemas compatibles determinados)
7. Ideas felices

**PROBLEMA 2**: **Discute y resuelve** el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los parámetros reales $\alpha$ y $\beta$:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x + y + z = \beta \\ 2x + y \qquad = \beta \\ x + \alpha y + z = 2 \end{array}\right\}$$

Discutiremos el sistema **utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius**. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x + y + z = \beta \\ 2x + y \qquad = \beta \\ x + \alpha y + z = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & \beta \\ 2 & 1 & 0 & \beta \\ 1 & \alpha & 1 & 2 \end{array}\right) = A^*$$



Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes, A. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real $\alpha$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = (\alpha + 2\alpha) - (1 + 2) = 3\alpha - 3 = 3(\alpha - 1)$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro $\alpha$, anulan este determinante. Es decir:



$$|A| = 3\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \quad \alpha = 1$$

Esto nos permite **distinguir dos casos posibles**:

| **CASO I:** $\alpha \neq 1$ | |
|---|---|
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} \alpha & 1 & 1 & \beta \\ 2 & 1 & 0 & \beta \\ 1 & \alpha & 1 & 2 \end{array}\right)$ | En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como **<u>SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO</u>**. $R(A) = R(A^*) = 3 = NUM.INCÓGNITAS$ |

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ \beta & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 \end{vmatrix}}{3(\alpha-1)} = \frac{\beta+\alpha\beta-2-\beta}{3(\alpha-1)} = \\
y &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \beta & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3(\alpha-1)} = \frac{\alpha\beta+4-\beta-2\beta}{3(\alpha-1)} = \frac{\alpha\beta-3\beta+4}{3(\alpha-1)} \\
z &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \beta \\ 2 & 1 & \beta \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix}}{3(\alpha-1)} = \frac{2\alpha+\beta+2\alpha\beta-\beta-\alpha^2\beta-4}{3(\alpha-1)} = \frac{2\alpha+2\alpha\beta-\alpha^2\beta-4}{3(\alpha-1)}
\end{aligned}\right\}$$



| **CASO II:** $\alpha = 1$ | |
|---|---|
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & \beta \\ 2 & 1 & 0 & \beta \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ | En este caso, la clasificación del sistema dependerá de los valores del parámetro $\beta$. Sabemos que el rango de la matriz de coeficientes en este caso será dos, ya que podemos encontrar un menor de orden dos no nulo:<br>$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2=-1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad Rg(A)=2$<br>Ahora bien, la matriz ampliada podría ser de rango 3. Calculemos los posibles valores de $\beta$ que determinan el rango de la matriz ampliada:<br>$\begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ \beta & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta+\beta-2-\beta=\beta-2=0 \quad \rightarrow \quad \beta=2$<br>Distinguiremos, entonces dos subcasos:<br>**SUBCASO I:** $\boldsymbol{\beta \neq 2}$<br>En esta ocasión, dado que existe un determinante de orden 3 diferente de cero en la matriz ampliada, concluiremos que:<br>$Rg(A^*)=3 \neq Rg(A)=2$<br>Por tanto, el sistema es **<u>COMPATIBLE INCOMPATIBLE</u>** |

**SUBCASO I: $\boldsymbol{\beta = 2}$**

En esta ocasión, se tiene que:

$$Rg(A^*) = Rg(A) = 2 \neq Num. incógnitas$$

Por tanto, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**. Se puede resolver fácilmente aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=F3-F1]{F2'=F2-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así pues, observamos que disponemos de un grado de libertad, por tanto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = \mu \end{cases}$$



siendo $\mu$ un parámetro real.

**Resumiendo** el estudio del sistema:

| CASO | TIPO DE SISTEMA | SOLUCIÓN |
|---|---|---|
| $\alpha \neq 1$ | COMPATIBLE DETERMINADO | $\left. \begin{array}{r} x = \dfrac{\alpha\beta - 2}{3(\alpha - 1)} \\ y = \dfrac{\alpha\beta - 3\beta + 4}{3(\alpha - 1)} \\ z = \dfrac{2\alpha + 2\alpha\beta - \alpha^2\beta - 4}{3(\alpha - 1)} \end{array} \right\}$ |
| $\alpha = 1$ y $\beta \neq 2$ | INCOMPATIBLE | No tiene solución |
| $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ | COMPATIBLE INDETERMINADO | $\begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad con\ \mu \in R$ |

**PROBLEMA 3**: Se sabe que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales. Además, verifican que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=119$ y $\|\vec{u}+\vec{v}\|=13$. Halla el módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Dado que:

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=119 \;\rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{v}=119$$
$$\rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=119 \rightarrow\; \|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=119$$

Y como:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|=13 \;\rightarrow\; \|\vec{u}+\vec{v}\|^2=169 \;\rightarrow\; (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=169 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{u}+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=169$$

Pero como los vectores u y v son ortogonales:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$



es decir, su producto escalar es cero. Esto nos permite escribir:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|=13 \;\rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{u}+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=169 \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}+2\cdot 0+\vec{v}\cdot\vec{v}=169 \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=169 \rightarrow\; \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2=169$$

Realizando un sistema de ecuaciones, obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=119\\ \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2=169\end{array}\right\} \rightarrow\; 2\|\vec{u}\|^2=288 \rightarrow\; \|\vec{u}\|^2=144 \rightarrow\; \|\vec{u}\|=12$$
$$\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2=169 \;\rightarrow\; 144+\|\vec{v}\|^2=169 \;\rightarrow\; \|\vec{v}\|^2=25 \;\rightarrow\; \|\vec{v}\|=5$$