PROBLEMA 1: Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

aplicando únicamente las propiedades de los determinantes (sin utilizar la regla de Sarrus ni el desarrollo por adjuntos).

Realizaremos combinaciones lineales entre las filas o columnas para conseguir ceros en el determinante y aplicaremos otras propiedades de los determinantes como la extracción de factor común (por filas o columnas).

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \overset{F1'=F1+F2+F3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \overset{\substack{C2'=C2-C1 \\ C3'=C3-C1}}{=} (a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} = -(a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2b & a+b+c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2b & a+b+c & 0 \\ -2c & 0 & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot(a+b+c) = (a+b+c)^3$$

En el último paso, hemos hecho uso de la propiedad que nos dice que el determinante de una matriz triangular (ya sea superior o inferior) es el producto de la diagonal principal.

PROBLEMA 2: Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de debe adoptar el parámetro real m para que la matriz sea singular.

b) Para $m=-2$, calcula la matriz inversa A^{-1}

c) Determina la matriz X que verifica la ecuación

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot X$$

a) Para que la matriz sea singular (es decir, para que **no tenga inversa**), su determinante debe ser cero. Así pues:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=m^2+4m+3 \quad\Rightarrow\quad m^2+4m+3=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}$$

Por tanto, la matriz *A* será singular para $m=-1$ y $m=-3$.

b) Supongamos ahora que $m=-2$. En este caso sabemos que la matriz A es invertible y por tanto podemos calcular su inversa. Realizaremos el cálculo mediante el uso de determinantes (recordar que también podría usarse aquí el método de Gauss-Jordan). Aplicaremos la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{Adj^T(A)}{|A|}$$

En este caso propuesto, la matriz A será:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que en el apartado anterior hemos calculado que $|A| = m^2 + 4m + 3$, se tendrá que para $m = -2$ este determinante vale:

$$|A| = (-2)^2 + 4\cdot(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Calculamos ahora la matriz de adjuntos:

$$Adj_{11}(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad Adj_{12}(A) = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad Adj_{13}(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$Adj_{21}(A) = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad Adj_{22}(A) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad Adj_{23}(A) = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$Adj_{31}(A) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \qquad Adj_{32}(A) = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \qquad Adj_{33}(A) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

Así pues:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 12 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{Adj^T(A)}{|A|} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 \\ 3 & -2 & -12 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

c) Intentemos obtener el valor de la matriz X despejando de la ecuación propuesta:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz que pre-multiplica a la matriz X es precisamente la matriz del apartado anterior. Dado que sabemos que tiene inversa podemos escribir que:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, dado que la inversa de la matriz ya la hemos calculado en el apartado anterior, simplemente hemos de realizar la multiplicación de matrices para obtener el resultado buscado:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 \\ 3 & -2 & -12 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} -18 & -44 & 1 \\ -28 & -66 & 4 \\ -16 & -39 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 3: **Calcula** razonadamente **la función derivada** de las siguientes funciones reales de variable real.

1) $f(x)=x^3$	2) $f(x)=\left(10x^3+8x^4+1\right)^5$	3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+10$
4) $f(x)=\sqrt{x^6+1}$	5) $f(x)=x^{-7}$	6) $f(x)=\sqrt{\left(2x^2+x\right)^3}$

Se trata de funciones de tipo potencial por lo que nos limitaremos a utilizar la regla de derivación pertinente y que recordaremos aquí:

$$h(x)=\left[f(x)\right]^n \quad\Rightarrow\quad h'(x)=n\cdot\left[f(x)\right]^{n-1}\cdot f'(x)$$

Así pues:

1) $f(x)=x^3 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2$

2) $f(x)=\left(10x^3+8x^4+1\right)^5 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=5\cdot\left(10x^3+8x^4+1\right)^4\cdot\left(30x^2+32x^3\right)$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+10=x^{2/3}+10 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-1/3}=\dfrac{2}{3x^{1/3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

4) $f(x)=\sqrt{x^6+1}=\left(x^6+1\right)^{1/2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^6+1\right)^{-1/2}\cdot 6x^5=\dfrac{6x^5}{2\sqrt{x^6+1}}=\dfrac{3x^5}{\sqrt{x^6+1}}$

5) $f(x)=x^{-7} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-7x^{-8}=\dfrac{-7}{x^8}$

6) $f(x)=\sqrt{\left(2x^2+x\right)^3}=\left(2x^2+x\right)^{3/2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{3}{2}\left(2x^2+x\right)^{1/2}\cdot\left(4x+1\right)$