PROBLEMA 1: Discute y resuelve en función del parámetro real m:

$$\begin{cases} x+y+mz=2 \\ x+my+z=2m \\ x+y-mz=0 \end{cases}$$

Discutiremos el sistema utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\begin{cases} x+y+mz=2 \\ x+my+z=2m \\ x+y-mz=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 1 & m & 1 & 2m \\ 1 & 1 & -m & 0 \end{array}\right) = A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real m:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2+1+m-m^2-1+m = 2m-2m^2 = -2m\cdot(m-1)$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro m, anulan este determinante. Es decir:

$$|A| = -2m\cdot(m-1) = 0 \Rightarrow m=0 \text{ ó } m=1$$

Esto nos permite distinguir tres casos posibles:

CASO I: $m\neq 0 \;\; y \;\; m\neq 1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 1 & m & 1 & 2m \\ 1 & 1 & -m & 0 \end{array}\right)$	En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**. $R(A)=R(A^*)=3=NUM.INCÓGNITAS$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & m\\ 2m & m & 1\\ 0 & 1 & -m\end{vmatrix}}{-2m\cdot(m-1)}=\frac{2\cdot(m^2-1)}{-2m\cdot(m-1)}=\frac{2\cdot(m-1)\cdot(m+1)}{-2m\cdot(m-1)}=\frac{m+1}{-m}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 0 & -m\end{vmatrix}}{-2m\cdot(m-1)}=\frac{2\cdot(-2m^2+m+1)}{-2m\cdot(m-1)}=\frac{-2\cdot(m-1)\cdot(2m+1)}{-2m\cdot(m-1)}=\frac{2m+1}{m}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & m & 2m\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}{-2m\cdot(m-1)}=\frac{2\cdot(1-m)}{-2m\cdot(m-1)}=\frac{-2\cdot(m-1)}{-2m\cdot(m-1)}=\frac{1}{m}$$

Así pues, la solución del sistema en este caso es:

$$(x,y,z)=\left(\frac{m+1}{-m},\frac{2m+1}{m},\frac{1}{m}\right)$$

CASO II: $m=01$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$	En este caso, el sistema es claramente <u>**INCOMPATIBLE**</u>, ya que la primera y tercera ecuación tienen los mismos coeficientes, pero diferentes términos independientes. Así pues, aquí se cumple que: $$2=R(A)\neq R(A^*)=3$$

CASO III: $m=1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)$	En este caso, el sistema es <u>**COMPATIBLE INDETERMINADO**</u>, ya los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden, pero no este valor es menor que el número de incógnitas. $$R(A)=R(A^*)=2<Num.incógnitas$$

Resolvamos el sistema en este caso mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F2 \leftrightarrow F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=F3-F1]{F2'=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -2z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\mu \\ y=\mu \\ z=1 \end{cases} con\ \mu \in R$$

PROBLEMA 2: Determina, en cada caso, la ecuación del objeto geométrico requerido:

a) **Ecuación general del plano** que pasa por el punto $A(1,2,1)$ y es paralelo al plano $x-2y+5z-1=0$

b) **Ecuación de la recta (como intersección de dos planos)** que pasa por el punto $A(1,2,1)$ y es paralela a la recta $x-1=\frac{y}{2}=2-z$

c) **Ecuación continua de la recta** que pasa por el punto $B(-1,1,0)$ y es paralela a los planos $x-2y+5z-1=0$ y $2x+3y-z+2=0$

d) **Ecuación paramétrica del plano** que es perpendicular al eje Z y pasa por el punto de corte de las rectas $x-1=y-2=\frac{z-1}{2}$ y $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$

a) Queremos determinar la ecuación de un plano. Por tanto, necesitaremos **un punto y dos vectores directores** o bien, **un punto y un vector normal** al plano. En este caso se observa que la opción más rápida consiste en construir el plano a partir de un punto y un vector normal. Dado que el plano a calcular es paralelo al plano $x-2y+5z-1=0$ concluimos que ambos tendrán el mismo vector normal (obsérvese la figura 1 adjunta). Así pues, la ecuación general del plano que buscamos será de la forma:

$$x-2y+5z+D=0$$

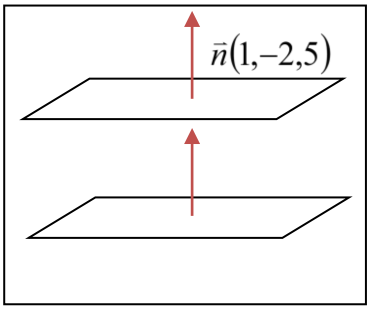

Figura 1

Para calcular el valor del término independiente D, lo que haremos será forzar al plano a pasar por el punto A (1,2,1) indicado. Para ello simplemente hemos de sustituir las coordenadas de dicho punto en la ecuación del plano:

$$1-2\cdot 2+5\cdot 1+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=-2$$

Por tanto, la ecuación del plano buscado es:

$$x-2y+5z-2=0$$

b) Dado que la recta que nos piden es paralela a:

$$x-1=\frac{y}{2}=2-z$$

Ambas tendrán el mismo vector director:

$$x-1=\frac{y}{2}=2-z \quad \Rightarrow \quad x-1=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}(1,2,-1)$$

Así pues, sabiendo que pasa por el punto A (1,2,1), la ecuación continua de la recta será:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

Para ponerla como intersección de dos planos simplemente hemos de considerar por separado dos de las igualdades de la ecuación continua:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2} \\ \dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2=y-2 \\ -y+2=2z-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ y+2z-4=0 \end{cases}$$

c) En este caso, ya tenemos el punto por donde ha de pasar la recta cuya ecuación queremos obtener. Sólo necesitaremos un vector director. Para ello basta observar que el vector director de la recta es perpendicular a los vectores normales de los dos planos a los que la recta es paralela (ver figura 4). Así pues, multiplicando vectorialmente los vectores normales de los dos planos obtendremos el director de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+5z-1=0 \;\;\Rightarrow\;\; \vec{n}_1(1,-2,5) \\ 2x+3y-z+2=0 \;\;\Rightarrow\;\; \vec{n}_2(2,3,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; \vec{d}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(-13,11,7)$$

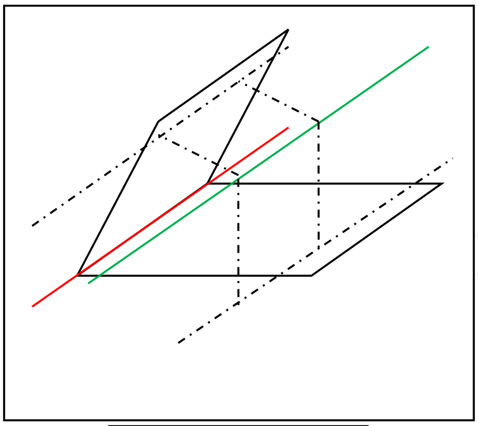

Figura 4

Así pues, la ecuación continua de la recta buscada es:

$$\frac{x+1}{-13}=\frac{y-1}{11}=\frac{z}{7}$$

d) En primer lugar, calcularemos el punto de intersección de las dos rectas dadas. Para ello simplemente hemos de resolver el sistema generado por ambas ecuaciones. Con la finalidad de no complicar en exceso la resolución de dicho sistema, lo que haremos será disponer una de las rectas en forma paramétrica y a continuación sustituir en la ecuación de la otra recta:

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=3-\lambda \qquad con\ \lambda\in\Re \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de la otra recta, obtenemos:

$$x-1=y-2=\frac{z-1}{2} \;\;\Rightarrow\;\; (3-2\lambda)-1=(3-\lambda)-2=\frac{(-1+2\lambda)-1}{2} \;\;\Rightarrow$$

$$2-2\lambda=1-\lambda=-1+\lambda \quad \Rightarrow 1-\lambda=-1+\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda=1$$

Sustituimos ahora el valor de $\lambda=1$ en la ecuación paramétrica y obtenemos el punto:

$$\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=3-\lambda \qquad con\ \lambda\in\Re \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2\cdot 1=1 \\ y=3-1=2 \\ z=-1+2\cdot 1=1 \end{cases} \Rightarrow \quad P(1,2,1)$$

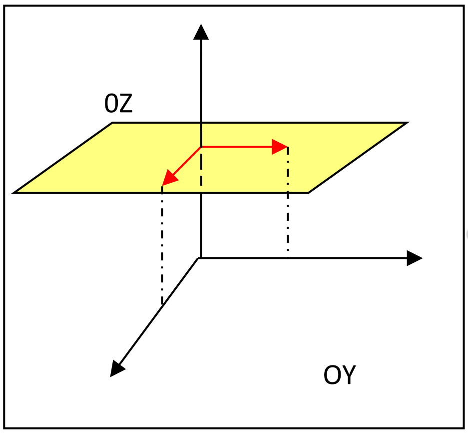

Figura 3

Una vez disponemos del punto de intersección de ambas rectas, sólo queda determinar un vector normal al plano o dos vectores directores. En este caso, resulta sencillo realizar cualquiera de las dos opciones. Dado que nos piden la ecuación paramétrica del plano, será más cómodo determinar dos vectores directores.

Como el plano es perpendicular al eje 0Z y sabemos que dos de sus vectores directores son $\vec{i}(1,0,0)$ y $\vec{j}(0,1,0)$ (ver figura 3). Por tanto, el plano será:

$$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\mu \quad con\ \lambda,\ \mu\in\Re \\ z=1 \end{cases}$$

PROBLEMA 3: Calcula la **derivada** de las siguientes funciones reales de variable real:

1) $f(x) = sen(3x+1)$ 2) $f(x) = \cos(Ln\, x)$ 3) $f(x) = sen^2 x \cdot \cos x$

4) $f(x) = \cos^2(x+1)$ 5) $f(x) = -Ln(\cos x)$ 6) $f(x) = \dfrac{sen\, x}{x}$

En esta ocasión todas las funciones están relacionadas con funciones trigonométricas. Así pues, recordemos las derivadas de estas funciones esenciales:

$$g(x) = sen\,(f(x)) \quad \rightarrow \quad g'(x) = f'(x) \cdot cos\,(f(x))$$

$$g(x) = cos\,(f(x)) \quad \rightarrow \quad g'(x) = -f'(x) \cdot sen\,(f(x))$$

$$g(x) = tg\,(f(x)) \quad \rightarrow \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{cos^2\,(f(x))} = f'(x) \cdot (1 + tg^2(f(x)))$$

Cuando intervienen expresiones trigonométricas puede suponer una ventaja conocer y tener presente las relaciones trigonométricas básicas estudiadas en cursos anteriores. Si no las recuerdas es aconsejable descargar el formulario disponible en la web y utilizarlo.

Teniendo en cuenta estas relaciones, la regla del producto y cociente, y las derivadas trabajadas en entregas anteriores, ya estamos en disposición de averiguar las derivadas propuestas:

1) $f(x) = sen(3x+1)$

$$f'(x) = 3 \cdot \cos(3x+1)$$

2) $f(x) = \cos(Ln\, x)$

$$f'(x) = -se\,n(Ln\, x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{-se\,n(Ln\, x)}{x}$$

3) $f(x) = sen^2 x \cdot \cos x$

$$f'(x) = 2 \cdot sen\, x \cdot \cos x \cdot \cos x + sen^2 x \cdot (-sen\, x) = 2 \cdot sen\, x \cdot \cos^2 x - sen^3 x$$

4) $f(x) = \cos^2(x+1)$

$$f'(x) = 2 \cdot \cos(x+1) \cdot (-\text{sen}(x+1)) =$$
$$= -2 \cdot \cos(x+1) \cdot \text{sen}(x+1) = -sen\,(2x+2)$$

5) $f(x) = -Ln(\cos x)$

$$f'(x) = -\frac{-sen\, x}{\cos x} = \frac{sen\, x}{\cos x} = tg\, x$$

6) $f(x) = \frac{sen\, x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x \cdot cos\, x - sen\, x}{x^2}$$