DOSSIER SEMANAL 10

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: **Discute y resuelve** el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z=2+m \\ (1-m)x+y+2z=1 \\ mx-y-z=1-m \end{array}\right\}$$

Discutiremos el sistema **utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius**. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z=2+m \\ (1-m)x+y+2z=1 \\ mx-y-z=1-m \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2+m \\ 1-m & 1 & 2 & 1 \\ m & -1 & -1 & 1-m \end{array}\right)=A^{*}$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes, A. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real k:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1-m & 1 & 2 \\ m & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ m+1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=m\cdot(m+1)$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro k, anulan este determinante. Es decir:

$$|A|=m\cdot(m+1)=0 \Rightarrow \quad m=0 \text{ ó } m=-1$$

Esto nos permite **distinguir tres casos posibles**:

CASO I: $m\neq 0 \;\; y \;\; m\neq -1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & m & 1 & 2+m \\ 1-m & 1 & 2 & 1 \\ m & -1 & -1 & 1-m \end{array}\right)$	En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como **<u>SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO</u>**. $R(A)=R(A^{*})=3=NUM.INCÓGNITAS$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r}
x=\dfrac{\begin{vmatrix}2+m & m & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1-m & -1 & -1\end{vmatrix}}{m\cdot(m+1)}=\dfrac{-2m^2+5m}{m\cdot(m+1)}=\dfrac{m\cdot(-2m+5)}{m\cdot(m+1)}=\dfrac{5-2m}{m+1}\\[2ex]
y=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 2+m & 1\\ 1-m & 1 & 2\\ m & 1-m & -1\end{vmatrix}}{m\cdot(m+1)}=\dfrac{2m^2+2m}{m\cdot(m+1)}=\dfrac{2m\cdot(m+1)}{m\cdot(m+1)}=2\\[2ex]
z=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & m & 2+m\\ 1-m & 1 & 1\\ m & -1 & 1-m\end{vmatrix}}{m\cdot(m+1)}=\dfrac{-m^3+3m^2-3m}{m\cdot(m+1)}=\dfrac{-m\cdot(m^2-3m+3)}{m\cdot(m+1)}=\dfrac{-(m^2-3m+3)}{m+1}
\end{array}\right\}$$

Así pues, la solución (en función de m) vendrá dada por:

$$(x,y,z)=\left(\frac{5-2m}{m+1},2,\frac{-(m^2-3m+3)}{m+1}\right)$$

CASO II: $m=-1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 2\end{array}\right)$	En este caso, el sistema es **<u>INCOMPATIBLE</u>**, ya los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes no coinciden. Esto se aprecia fácilmente si aplicamos Gauss: $$\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[F3'=F3+F1]{F2'=F2-2F1}\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0 & 3\end{array}\right)\xrightarrow[F3'=3F3+2F2]{}$$ $$\to\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{array}\right)$$ Observamos que el número de filas no nulas en A es dos, mientras que en la matriz ampliada no hay ninguna fila nula. Así pues, aquí se cumple que: $$R(A)=2\neq R(A^*)=3$$

<table>
<tr><th colspan="2">CASO III: $m = 0$</th></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$</td><td>En este caso, el sistema es <u>COMPATIBLE INDETERMINADO</u>, ya los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden, pero este valor es menor que el número de incógnitas. Se aprecia fácilmente si aplicamos Gauss:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{F2'=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{F3'=F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Por tanto, se observa que:
$$R(A) = R(A^*) = 2 \neq Num.\, incógnitas$$</td></tr>
</table>

Resolvamos el sistema aprovechando la aplicación del método de Gauss realizado en la discusión. En este caso, observamos que disponemos de un grado de libertad, por tanto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ y + z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in R$$

PROBLEMA 2: Considera las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 0 & 1 & 1+k \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores del parámetro real k para que la matriz M sea **invertible**.
b) Para $k = 0$, determina la **matriz X** que verifica: $XM - N = X$
c) Determina el valor del **determinante** de la matriz $(3N^2)^{-1}$

a) Para que la matriz M sea invertible, su determinante no ha de ser cero. Así pues, calculemos el determinante y averigüemos qué valores de k lo anulan:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 0 & 1 & 1+k \end{vmatrix} = [C3' = C3 - C1] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1 & 1+k \end{vmatrix}$$

$$|M| = 3 \cdot (1-k) \cdot (1+k)$$

Así pues:

$$|M| = 3 \cdot (1-k) \cdot (1+k) = 0$$

lo que implica que: $k = 1$ o $k = -1$. Por tanto, la matriz M es invertible para todo valor de $k \neq \pm 1$

b) Resolviendo la ecuación matricial propuesta vemos que:

$$XM - N = X \quad \rightarrow \quad XM - X = N \quad \rightarrow \quad X \cdot (M - I) = N \quad \rightarrow \quad X = N \cdot (M-I)^{-1}$$

Siempre que exista la matriz inversa de $M - I$. Veamos si existe, y en caso de que así sea, calculemos la matriz inversa:

$$M - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que:

$$|M - I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Podemos asegurar que la matriz $B = M - I$ tiene inversa. Por ello:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot Adj^T(B)$$

Dado que ya sabemos el valor de su determinante ($|B| = 1$), calcularemos primeramente la matriz de adjuntos:

$$B_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad B_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad B_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad B_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$B_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad B_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad B_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, **la inversa de la matriz B será**:

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$X = N \cdot (M - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Dado que el determinante de la matriz N es:

$$|N| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Aplicando las propiedades de los determinantes, tenemos que:

$$|(3N^2)^{-1}| = \frac{1}{|3N^2|} = \frac{1}{3^3|N|^2} = \frac{1}{27 \cdot (-2)^2} = \frac{1}{108}$$

PROBLEMA 3: Considera las ecuaciones de la recta r y s:

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{2-z}{-2}$$

$$s: \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 2 + \alpha = 0 \end{cases}$$

a) Calcula el valor del parámetro real α para que ambas rectas estén **contenidas en un plano**.

b) Para el valor del parámetro obtenido en el apartado anterior, calcula la ecuación implícita del **plano que contiene** a las rectas r y s.

c) Calcula la ecuación implícita del **plano perpendicular** a la recta r y que contiene al punto $A(1, 2, 1)$

a) Primeramente, expresaremos ambas rectas en una ecuación que nos permita extraer un punto y un vector director de ambas, de forma sencilla:

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{2-z}{-2} \to r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{2}$$

$$s:\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+2+\alpha=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad s:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=(2+\alpha)+3\lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in \mathbb{R}$$

A partir de aquí se aprecia fácilmente que un punto y un vector director de cada recta viene dado por:

Recta r: $P_r(3,-1,2)$ $\vec{u}_r=(2,4,2)$ Recta s: $P_s(1,0,2+\alpha)$ $\vec{u}_s=(-2,1,3)$

Dado que los vectores directores de ambas rectas no son proporcionales, podemos asegurar ya que r y s no serán ni paralelas ni coincidentes. Para discernir si se cruzan o son secantes, calcularemos el valor del determinante:

$$\det(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{P_r P_s})=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-3 \end{vmatrix}=10\cdot(\alpha-3)$$

Dicho determinante se anula cuando:

$$10\cdot(\alpha-3)=0 \quad \rightarrow \quad \alpha=3$$

Por tanto, para que ambas rectas sean coplanarias, deben ser secantes y esto se cumplirá cuando $\alpha=3$.

b) En primer lugar, dado que ambas rectas son secantes, para obtener el plano que las contiene deberemos tomar sus directores como vectores directores del plano y tomaremos un punto cualquiera de una de las rectas:

$$\pi:\begin{vmatrix} x-1 & y & z-5 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 10x-10y+10z-60=0 \rightarrow \pi:\ x-y+z-6=0$$

c) Dado que queremos un plano perpendicular a la recta r, el vector normal de este plano coincidirá con el vector director de la recta. Así pues, la ecuación implícita del plano que nos piden tendrá la forma:

$$2x+4y+2z+D=0$$

Como el plano debe pasar por el punto $A(1,2,1)$:

$$2\cdot1+4\cdot2+2\cdot1+D=0 \quad \rightarrow \quad D=-12$$

Por lo que el plano buscado será:

$$2x+4y+2z-12=0$$

Simplificando la ecuación:

$$x+2y+z-6=0$$