DOSSIER SEMANAL 2

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Calcula el valor de los parámetros reales a y b para que la función f(x) sea continua en todo el conjunto de los números reales.

$$f(x)=\begin{cases} ax+4 & si\ x\le -1 \\ \left| x^2+2x+b \right| & si\ -1<x<1 \\ 1+Ln\ x & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

En primer lugar analizamos y calculamos el dominio de la función por si existiera algún punto problemático donde debiéramos dedicar especial atención.

- En el primer tramo y segundo tramo, la función es una función polinómica (sin y con valor absoluto, respectivamente) y en consecuencia no presentan problemas de dominio.

- El tercer tramo presenta problemas de definición cuando el argumento del logaritmo sea negativo o cero. Es decir: $x\le 0$. No obstante, dado que esta función sólo se considera cuando $x\ge 1$, podemos concluir que no presenta problemas de dominio.

En conclusión, el dominio de la función $f(x)$ es todo el conjunto de los números reales. Por tanto, los únicos puntos que requieren especial atención con respecto a la continuidad son los puntos de cambio, transacción o soldadura:

Realicemos ahora el estudio detallado de la continuidad:

- Para $x<1$: La función $f(x)$ en este tramo es un polinomio. Como sabemos, los polinomios son continuos en todo R. En particular será continua en $x<1$.

- Para $-1<x<1$: La función $f(x)$ en este caso es una composición de funciones continuas en todo R. En particular, será continua en el intervalo indicado de $-1<x<1$.

- Para $x>1$: Aquí, la función $f(x)$ es continua en $x>0$ por ser composición de funciones continuas en $x>0$. De forma particular, será continua en el intervalo indicado de $x>1$.

Ahora sólo nos resta analizar los puntos de cambio:

- Para $x=-1$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=a\cdot(-1)+4=4-a \\ \displaystyle\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} ax+4=4-a \\ \displaystyle\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} \left|x^2+2x+b\right|=\left|-1+b\right| \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 4-a=\left|-1+b\right|$$

- Para $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1+Ln\,1=1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} \left|x^2+2x+b\right|=\left|3+b\right| \\ \displaystyle\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} 1+Ln\,x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 1=\left|3+b\right|$$

Así pues, si queremos que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales deberá cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 4-a=\left|-1+b\right| \\ 1=\left|3+b\right| \end{array}\right\}$$

Comenzando a resolver este sistema por la segunda ecuación observamos que:

$$1=\left|3+b\right| \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1=3+b \\ -1=3+b \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} b=-2 \\ b=-4 \end{cases}$$

Es decir, tendremos dos posibles soluciones:

- Si $b=-2 \quad \Rightarrow \quad 4-a=\left|-1-2\right| \quad \Rightarrow \quad 4-a=3 \quad \Rightarrow \quad a=1$
- Si $b=-4 \quad \Rightarrow \quad 4-a=\left|-1-4\right| \quad \Rightarrow \quad 4-a=5 \quad \Rightarrow \quad a=-1$

Así pues, los valores que deben tomar los parámetros reales a y b para que la función sea continua son o bien $a=1$ y $b=-2$, o bien $a=-1$ y $b=-4$.

PROBLEMA 2: Estudia la continuidad de la siguiente función real de variable real:

$$g(x)=\begin{cases} (x+\pi)\cdot cos\left(\dfrac{1}{x+\pi}\right) & si\ x<-\pi \\ e^{1+\frac{x}{\pi}}+\dfrac{1-cos\ x}{x} & si\ -\pi\le x<0 \\ \left(\dfrac{1+x}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{x}} & si\ x>0 \end{cases}$$

Antes de analizar la continuidad de la función propuesta, estudiaremos su dominio por si existiera algún punto que requiriera ser estudiado.

- Para $x<-\pi$: La función $g(x)$ sólo presenta problemas de dominio en $x=-\pi$ ya que para este valor se anularía el denominador de la fracción contenida en el coseno. No obstante, dado que dicha función sólo la consideramos para valores de $x<-\pi$, no supone problema alguno.

- Para $-\pi\le x<0$: La función $g(x)$ presenta problemas de dominio en $x=0$ pero dado que el valor no entra en el tramo donde se define dicha función, no hay problemas reales de dominio aquí.

- Para $x>0$: La función $g(x)$ presenta problemas de definición en aquellos valores donde se anulan los denominadores que aparecen:

$$1-x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm1$$
$$x=0$$

  De estos valores, el único que entra dentro del intervalo donde se considera la función sería $x=1$.

Así pues, teniendo en cuenta que la función $g(x)$ no está definida $x=0$, el dominio de la función sería $D[g(x)]=R-\{0,1\}$.

A la hora de estudiar su continuidad deberemos prestar detalle a los valores donde hay problemas de definición y los valores de cambio o soldadura.

Realicemos ahora el estudio detallado de la continuidad:

- Para $x<-\pi$: La función $g(x)$ en este caso es una composición de funciones continuas en todo R. En particular será continua en $x<-\pi$.

- Para $-\pi<x<0$: La función $g(x)$ en este caso es suma de composiciones de funciones continuas en $-\pi<x<0$.

- Para $x>0$: La función $g(x)$ en este caso es composición de funciones continuas en $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Así pues, $g(x)$ es continua en $(0,1)\cup(1,+\infty)$ y quizá en $x=1$ podría presentar alguna discontinuidad.

Analicemos ahora los puntos problemáticos o de especial interés:

- Para $x=-\pi$

$$g(-\pi)=e^{1+\frac{-\pi}{\pi}}+\frac{1-cos\,(-\pi)}{-\pi}=e^{0}+\frac{1-(-1)}{-\pi}=1-\frac{2}{\pi}$$

$$\underset{x\to-\pi-}{Lim}\ g(x)=\underset{x\to-\pi-}{Lim}\ (x+\pi)\cdot cos\left(\frac{1}{x+\pi}\right)=\left[0\cdot cos\left(\frac{1}{0}\right)\right]=\left[\begin{array}{c}\text{Como la función } \cos(x) \text{ está} \\ \text{acotada}: \\ -1\le\cos(x)\le 1 \\ \text{podemos afirmar que} \\ 0\cdot cos\left(\frac{1}{0}\right)\to 0\end{array}\right]=0$$

$$\underset{x\to-\pi+}{Lim}\ g(x)=\underset{x\to-\pi+}{Lim}\ e^{1+\frac{x}{\pi}}+\frac{1-cos\ x}{x}=1-\frac{2}{\pi}$$

Así pues, dado que:

$$g(-\pi)=\underset{x\to-\pi+}{Lim}\ g(x)\neq\underset{x\to-\pi-}{Lim}\ g(x)$$

Podemos decir que la función $g(x)$ no es continua en $x=-\pi$ ya que presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

- Para $x=0$

  $g(0)=\nexists$

$$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} e^{1+\frac{x}{\pi}}+\frac{1-\cos x}{x}=\left[e+\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c}Aplicando\ infinitésimos\\ equivalentes,\ sabemos\ que:\\ 1-\cos x\approx_0 \frac{x^2}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0-} e+\frac{\frac{x^2}{2}}{x}=\lim_{x\to 0-} e+\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to 0-} e+\frac{x}{2}=e$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\Rightarrow INDETERMINACIÓN\right]=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1+x}{1-x^2}-1\right)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1+x-1+x^2}{1-x^2}\right)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0+}\left(\frac{x+x^2}{1-x^2}\right)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0+}\frac{x\cdot(1+x)}{x\cdot(1+x)\cdot(1-x)}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0+}\frac{1}{(1-x)}}=e$$

Como vemos, la función $g(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x=0$ ya que:

$$g(0)\neq \lim_{x\to -0+} g(x)=\lim_{x\to -0-} g(x)$$

- Para $x=1$

  $g(1)=\nexists$

$$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-}\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=+\infty^{\lim_{x\to -1-}\frac{1}{x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=(-\infty)^{\lim_{x\to -1-}\frac{1}{x}}=\nexists$$

Así pues, la función presenta en este caso una discontinuidad inevitable de segunda especie ya que el límite de $g(x)$ por la derecha de $x=1$ no existe. Vamos a demostrarlo:

Calculemos primeramente el límite por la izquierda. Para ello, llamaremos A al límite que deseamos calcular:

$$A = \lim_{x \to 1-} \left(\frac{1+x}{1-x^2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Aplicamos logaritmos en ambos miembros de la igualdad:

$$Ln\ A = Ln \left[\lim_{x \to 1-} \left(\frac{1+x}{1-x^2} \right)^{\frac{1}{x}} \right] \quad \Rightarrow \quad Ln\ A = \lim_{x \to 1-} Ln \left(\frac{1+x}{1-x^2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Tras aplicar las propiedades de los logaritmos observamos que:

$$Ln\ A = \lim_{x \to 1-} \frac{1}{x} \cdot Ln \left(\frac{1+x}{1-x^2} \right) = \lim_{x \to 1-} \frac{1}{x} \cdot Ln \left(\frac{1}{1-x} \right) = \left[1 \cdot Ln\,(+\infty) \right] = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad Ln\ A = +\infty \quad \Rightarrow A = e^{+\infty} = +\infty \quad \Rightarrow \lim_{x \to 1-} \left(\frac{1+x}{1-x^2} \right)^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Siguiendo ahora el mismo procedimiento, calcularemos el límite por la derecha:

$$B = \lim_{x \to 1+} \left(\frac{1+x}{1-x^2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$Ln\ B = Ln \left[\lim_{x \to 1+} \left(\frac{1+x}{1-x^2} \right)^{\frac{1}{x}} \right] \quad \Rightarrow \quad Ln\ B = \lim_{x \to 1+} Ln \left(\frac{1+x}{1-x^2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$Ln\ B = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x} \cdot Ln \left(\frac{1+x}{1-x^2} \right) = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x} \cdot Ln \left(\frac{1}{1-x} \right) = \left[1 \cdot Ln\,(-\infty) \right] = \nexists$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 1+} \left(\frac{1+x}{1-x^2} \right)^{\frac{1}{x}} = \nexists$$

Así pues, como conclusión de la actividad diremos que la función $g(x)$ es una función continua en $R - \{ -\pi, 0, 1 \}$ y que presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$, una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = -\pi$ y una discontinuidad de segunda especie en $x = 1$.

PROBLEMA 3: Enuncia el Teorema de Bolzano. Tras ello, justifica si la ecuación:

$$Ln\left(1+x^2\right)=x^3-1$$

tiene alguna solución real.

Enunciemos primeramente el Teorema de Bolzano:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y verifica además que $f(a)\cdot f(b)<0$ (es decir, la función toma valores de signo opuesto en los extremos) entonces existe al menos un punto que llamaremos c del intervalo abierto (a,b)donde la función $f(x)$ se anula. Expresando la tesis matemáticamente:

$$\exists c\in(a,b)\mid f(c)=0$$

Vamos ahora a atender a la segunda parte del ejercicio. Comprobar si la ecuación:

$$Ln\left(1+x^2\right)=x^3-1$$

tiene alguna solución real equivale a comprobar que la ecuación equivalente:

$$Ln\left(1+x^2\right)-x^3+1=0$$

tiene solución real. Definimos, por tanto, la función:

$$f(x)=Ln\left(1+x^2\right)-x^3+1$$

y procederemos a comprobar que verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano:

1) $f(x)$ es una función continua en todo R por ser composición de funciones continuas en todo R. Así pues, en particular, será continua en cualquier intervalo cerrado que consideremos.

2) Se observa, además, que:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=Ln\left(1+0^2\right)-0^3+1=1>0 \\ f(2)=Ln\left(1+2^2\right)-2^3+1\approx-5.39<0 \end{array}\right\}\Rightarrow\quad f(0)\cdot f(2)<0$$

Así pues, dado que $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[0,2]$ y se verifica que $f(0)\cdot f(2)<0$ podemos concluir que existirá al menos un punto c en el intervalo $(0,2)$ donde la función vale cero. Matemáticamente:

$$\exists c \in (0,2) \mid f(c)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in (0,2) \mid Ln\left(1+c^2\right)-c^3+1=0$$

Con ello queda demostrado que la ecuación propuesta tiene al menos una solución real en el intervalo abierto $(0,2)$.