PROBLEMA 1: **Discute y resuelve** (siempre que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del valor del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} x+\ \ ay+a^2z=1 \\ x+\ \ ay+\ az=a \\ x+a^2y+a^2z=a^2 \end{array}\right\}$$

Discutiremos el sistema utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+\ \ ay+a^2z=1 \\ x+\ \ ay+\ az=a \\ x+a^2y+a^2z=a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 & a^2 \end{array}\right) = A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real a:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = a^2 \cdot (a-1)^2$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro a, anulan este determinante. Es decir:

$$|A| = a^2 \cdot (a-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a=0 \quad ó \quad a=1$$

Esto nos permite distinguir tres casos posibles:

CASO I: $a \neq 0 \quad y \quad a \neq 1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 & a^2 \end{array}\right)$	En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**. $$R(A)=R(A^*)=3=NUM.INCÓGNITAS$$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{l}
x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a & a \\ a^2 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2\cdot(a-1)^2}=\dfrac{0}{a^2\cdot(a-1)^2}=0 \\
y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2\cdot(a-1)^2}=\dfrac{a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}}{a^2\cdot(a-1)^2}=\dfrac{a\cdot(a-1)^2\cdot(a+1)}{a^2\cdot(a-1)^2}=\dfrac{a+1}{a} \\
z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2\cdot(a-1)^2}=\dfrac{a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{a^2\cdot(a-1)^2}=\dfrac{-a\cdot(a-1)^2}{a^2\cdot(a-1)^2}=\dfrac{-1}{a}
\end{array}\right\} \Rightarrow (x,y,z)=\left(0,\dfrac{a+1}{a},\dfrac{-1}{a}\right)$$

CASO II: $a=0$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	En este caso, el sistema es claramente **INCOMPATIBLE**, ya que si despejamos x de la primera ecuación y de la segunda obtenemos valores distintos. Así pues, aquí se cumple que: $1=R(A)\neq R(A^*)=2$
CASO III: $a=1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$	En este caso, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**, ya que todas las ecuaciones son idénticas. De hecho se tiene que: $R(A)=R(A^*)=1<NUM.INCÓGNITAS$

Resolvamos el sistema en este caso. Dado que el rango del sistema es 1, sabemos que sólo necesitaremos una ecuación para resolver el sistema y en consecuencia dos de las incógnitas actuarán como parámetros reales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=1-\lambda-\mu \end{cases} \quad con \quad \lambda,\mu\in\Re$$

PROBLEMA 2: Dada siguiente matriz donde x es un valor real:

$$A=\begin{pmatrix} sen\,x & -\cos x & 0 \\ \cos x & sen\,x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Calcula para qué valores reales del parámetro x, la matriz A es singular.

b. Calcula su inversa cuando $x=\pi$

a) La matriz A será invertible si su determinante es distinto de cero. Simplemente calcularemos el determinante de A y comprobaremos que no es cero valga lo que valga x:

$$|A|=\begin{vmatrix} sen\,x & -\cos x & 0 \\ \cos x & sen\,x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} sen\,x & -\cos x \\ \cos x & sen\,x \end{vmatrix}=2\cdot\left(sen^2 x+\cos^2 x\right)=2\cdot 1=2\neq 0$$

Así pues, **la matriz A es regular para cualquier valor real de x**.

b) Necesitaremos obtener la inversa de la matriz A para $x=\pi$. En este caso, dado que $sen\,\pi=0$ y $\cos\pi=-1$ la matriz A será:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos primeramente la matriz de adjuntos:

$$Adj_{11}(A)=\begin{vmatrix}0&0\\0&2\end{vmatrix}=0 \qquad Adj_{12}(A)=-\begin{vmatrix}-1&0\\0&2\end{vmatrix}=2 \qquad Adj_{13}(A)=\begin{vmatrix}-1&0\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$Adj_{21}(A)=-\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=-2 \qquad Adj_{22}(A)=\begin{vmatrix}0&0\\0&2\end{vmatrix}=0 \qquad Adj_{23}(A)=-\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$Adj_{31}(A)=\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}=0 \qquad Adj_{32}(A)=-\begin{vmatrix}0&0\\-1&0\end{vmatrix}=0 \qquad Adj_{33}(A)=\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}=1$$

Así pues:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}0&2&0\\-2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{Adj^T(A)}{|A|}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix}$$

PROBLEMA 3: Calcula la **derivada** de las siguientes funciones reales de variable real:

1) $f(x) = Ln\sqrt{x}$ 2) $f(x) = Log_2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ 3) $f(x) = x \cdot Ln\left(x^2 - 3x\right)$

4) $f(x) = \sqrt{Ln(2x+5)}$ 5) $f(x) = \frac{Ln\left(x^3 - 1\right)}{x-1}$ 6) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

Para la resolución de esta actividad utilizaremos las reglas de derivación del producto y el cociente de dos funciones, cuyas expresiones vamos a recordar a continuación:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

También haremos uso de la derivada de una función logarítmica:

$$h(x) = \log_a f(x) \quad \rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{Ln\ a}$$

$$h(x) = ln\ f(x) \quad \rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

También aplicaremos (en algún momento) las propiedades de los logaritmos para facilitar y acelerar el proceso de cálculo de alguna derivada.

1) Para obtener la derivada de esta función aplicaremos primero alguna propiedad de los logaritmos ya que nos facilitará el cálculo de la deriva notablemente:

$$f(x) = Ln\sqrt{x} = Ln\ x^{1/2} = \frac{1}{2}\ Ln\ x \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

2) Nuevamente, antes de derivar, usaremos primero propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = Log_2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = Log_2\, x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} Log_2\, x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{Ln\, 2} = -\frac{1}{2x\, Ln\, 2} = -\frac{1}{x\, Ln\, 4}$$

3) Aquí, derivaremos el producto propuesto:

$$f(x) = x\, Ln(x^2-3x) \;\rightarrow\; f'(x) = 1\cdot Ln(x^2-3x) + x\cdot\frac{2x-3}{x^2-3x}$$

Simplifiquemos y arreglemos un poco el resultado:

$$f'(x) = Ln(x^2-3x) + x\cdot\frac{2x-3}{x\cdot(x-3)} = Ln(x^2-3x) + \frac{2x-3}{x-3}$$

4) Aplicando previamente propiedades de los determinantes, la derivación se hace muy sencilla:

$$f(x) = Ln\left(\sqrt{2x+5}\right) = Ln\,(2x+5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot Ln\,(2x+5)$$

$$\rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+5} = \frac{1}{2x+5}$$

5) Al igual que en el apartado anterior:

$$f(x) = \frac{Ln\,(x^3-1)}{x-1} \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{\frac{3x^2}{x^3-1}\cdot(x-1) - 1\cdot Ln\,(x^3-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{3x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}\cdot(x-1) - Ln\,(x^3-1)}{(x-1)^2} = \frac{\frac{3x^2}{(x^2+x+1)} - Ln\,(x^3-1)}{(x-1)^2}$$

6) Aquí, el trabajo es considerablemente menor si antes de derivar aplicamos las propiedades de las potencias:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^{3/2}}{x^{2/3}} = x^{5/6} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{6}x^{-1/6} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$$