PROBLEMA 1: **Obtén la expresión analítica** de la función polinómica de tercer grado que presenta un máximo en el punto $(0,4)$ y un mínimo en $(2,0)$.

Consideremos un polinomio de tercer grado cualquiera: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ donde a, b, c, d$\in R$. Para poder averiguar los valores de los parámetros simplemente hemos de traducir la información proporcionada en cuatro ecuaciones.

Dado que el punto $(0,4)$ es un máximo de la función $f(x)$ sabemos que la primera derivada cuando $x=0$ valdrá cero:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad \Rightarrow \quad f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f'(0)=3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0 \quad \Rightarrow \quad c=0$$

Además, al ser un máximo sabemos que es un punto de la propia curva o función. En consecuencia cuando $x=0$ debe cumplirse que $f(0)=4$. Ello nos lleva a:

$$f(0)=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=4 \quad \Rightarrow \quad d=4$$

Actuando de la misma forma con el punto $(2,0)$, sabemos que la primera derivada se anulará para $x=2$ y por ser punto de la función debe cumplirse además que $f(2)=0$:

$$f'(2)=3a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c=0 \quad \Rightarrow \quad 12a+4b=0$$

$$f(2)=a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d=0 \quad \Rightarrow \quad 8a+4b+4=0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante:

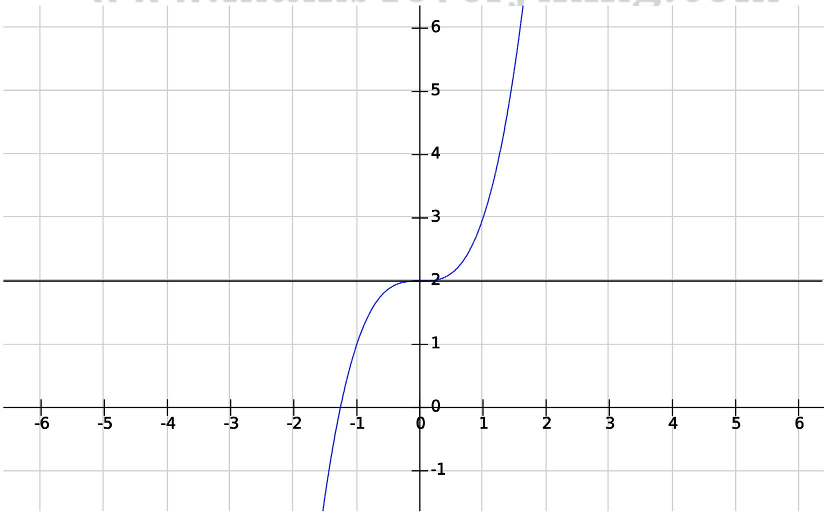
$$\left.\begin{array}{l} 12a+4b=0 \\ 8a+4b=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 3a+b=0 \\ 2a+b=-1 \end{array}\right\} - \\ \hline a \quad = \quad 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2+b=-1 \quad \Rightarrow \quad b=-3$$

Así pues, **el valor de los parámetros de la función han de valer** $a=1$, $b=-3$, $c=0$ y $d=4$. Es decir, la función adoptará la expresión $f(x)=x^3-3x^2+4$

PROBLEMA 2: Determina si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas **justificando adecuadamente tu respuesta**:

- **a)** Si la derivada de una función en un punto es cero, entonces ese punto se corresponde con un máximo o un mínimo de la función.
- **b)** La ecuación $sen\ x = 2x - 3$ tiene al menos una solución en el intervalo $]1, 2[$
- **c)** Si una función $f(x)$ es continua para todo número real, entonces es derivable.
- **d)** No existen dos funciones distintas con la misma función derivada.
- **e)** La recta $y = -6x - 1$ es tangente a la función $f(x) = x^3 - 9x + 7$ en $x = 1$
- **f)** La recta $y = x + 5$ es normal a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x$ en $x = 1$
- **g)** La función $f(x) = |x|$ es derivable para todo número real.

a) **FALSO**. Recordemos que para que un punto de una función sea máximo o mínimo su derivada en dicho punto debe ser cero pero no todos aquellos puntos donde la derivada se anula han de ser necesariamente máximos o mínimos de la función. Basta considerar la función $f(x) = x^3 + 2$. Observemos que ocurre en para $x = 0$ esta función:



$$f(x)=x^3+2 \;\Rightarrow\; f'(x)=2x^2 \;\Rightarrow\; 2x^2=0 \;\Rightarrow\; x=0$$

$-\infty$		0	$+\infty$
Signo de f'(x)	+		+
Monotonia de f(x)	$\nearrow$		$\nearrow$

Como puede apreciarse la derivada de la función en x=0 es cero, pero en este punto no hay ni un máximo ni un mínimo relativo.

b) **VERDADERO**. Basta aplicar el Teorema de Bolzano para demostrarlo. Queremos ver si la ecuación tiene solución en el intervalo. Para ello definiremos la función:

$$h(x) = sen\, x - 2x + 3$$

Para poder usar el Teorema de Bolzano debemos asegurarnos de que dicha función es continua en un intervalo abierto y que toma valores de signo opuesto en los extremos. Sabemos que la función $h(x)$ es continua en todo R por ser suma de funciones continuas. Por tanto, en particular será continua en el intervalo $\left]1, 2\right[$. Veamos ahora que valores adopta la función en los extremos:

$$h(1) = sen\, 1 - 2\cdot 1 + 3 > 0$$
$$h(2) = sen\, 2 - 2\cdot 2 + 3 < 0$$

Por tanto, dado que se cumplen las hipótesis del Teorema de Bolzano, podemos concluir que:

$$\exists c \in \left]1, 2\right[\;\middle|\; h(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in \left]1, 2\right[\;\middle|\; sen\, c - 2c + 3 = 0$$

Es decir, la ecuación $sen\, x - 2x + 3 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $\left]1, 2\right[$

c) **FALSO**. Es cierto que toda función derivable es continua, pero no siempre ocurre lo contrario. Basta recordar que gráficamente una función continua es aquella que podemos trazar "sin necesidad de levantar el lápiz del papel" mientras que una función derivable es aquella que no presenta picos o puntos de retroceso. Así pues, es fácil encontrar una función que sea continua pero que posea picos y en consecuencia no sea derivable. Por ejemplo, $f(x)=|x|$

d) **FALSO.** Basta considerar las rectas $f(x)=2x+1$ y $g(x)=2x-5$. Dichas funciones son distintas, pero ambas poseen exactamente la misma función derivada.

e) **FALSO**. En este caso basta con observar que las dos funciones no adoptan el mismo valor para $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} y(1)=-6-1=-7 \\ f(1)=1-9+7=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y(1)\neq f(1)$$

Por tanto, es imposible que la recta dada sea tangente a la función en $x=1$.

f) **FALSO**. Podría razonarse de la misma forma que el apartado anterior. No obstante, vamos a realizarlo de otra forma. Calcularemos la recta normal a la función en $x=1$ y comprobaremos que no coincide con la recta proporcionada. Sabemos que la recta normal a una función en un punto cualquiera $x=a$ viene dada por:

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

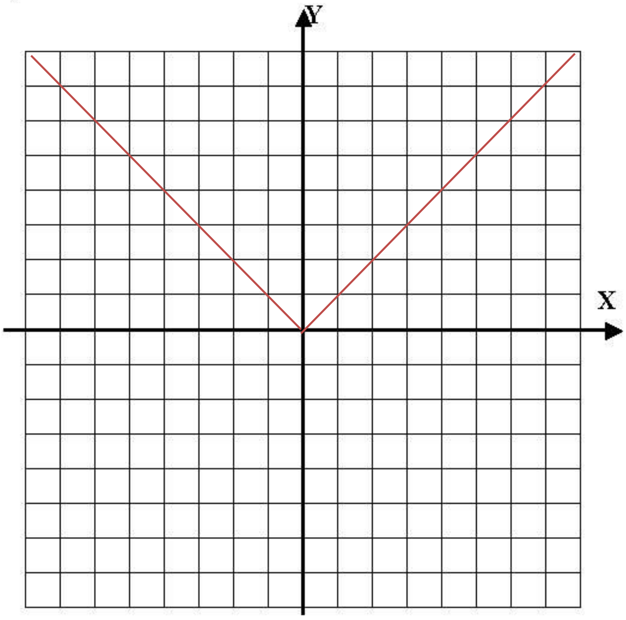
Así pues:

$$f(x)=x^2-x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2x-1 \quad \Rightarrow \quad f'(1)=2-1=1$$

Por tanto, la recta normal será:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) \quad \Rightarrow \quad y - 0 = -\frac{1}{1}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = 1 - x$$

g) **FALSO.** Basta realizar la representación gráfica de la función $f(x) = |x|$ para ver que ésta no es derivable en $x = 0$.



PROBLEMA 3: **Discute y resuelve** el siguiente sistema en función del parámetro real m:

$$\begin{cases} x + my + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases}$$

Discutiremos el sistema utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\begin{cases} x + my + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -m \end{matrix}}_{\text{A}} \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right.\right) = A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real m:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m - 3m + 2 - 3 + 1 + 2m^2 = 2m^2 - 4m = 2m \cdot (m-2)$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro m, anulan este determinante. Es decir:

$$|A| = 2m \cdot (m-2) = 0 \;\Rightarrow\; m = 0 \text{ ó } m = 2$$

Esto nos permite distinguir tres casos posibles:

CASO I: $m \neq 0 \;\; y \;\; m \neq 2$	
$\left(\begin{matrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -m \end{matrix} \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right.\right)$	En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**. $R(A) = R(A^*) = 3 = NUM.INCÓGNITAS$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & m & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -m\end{vmatrix}}{2m\cdot(m-2)}=\frac{m^2-5m}{2m\cdot(m-2)}=\frac{m\cdot(m-5)}{2m\cdot(m-2)}=\frac{m-5}{2m-4}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 3 & -m\end{vmatrix}}{2m\cdot(m-2)}=\frac{3m}{2m\cdot(m-2)}=\frac{3}{2\cdot(m-2)}=\frac{3}{2m-4}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & m & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}}{2m\cdot(m-2)}=\frac{-3m}{2m\cdot(m-2)}=\frac{-3}{2\cdot(m-2)}=\frac{-3}{2m-4}$$

Así pues, la solución del sistema en este caso es:

$$(x,y,z)=\left(\frac{m-5}{2m-4},\frac{3}{2m-4},\frac{-3}{2m-4}\right)$$

CASO II: $m=0$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -2 & 3\end{array}\right)$	En este caso, el sistema es claramente **INCOMPATIBLE**, ya que: $2=R(A)\neq R(A^*)=3$ De hecho, puede comprobarse fácilmente utilizando Gauss: $\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F2'=F2-2F1\\ F3'=F3-3F1}]{}\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -3 & -3\\ 0 & -5 & -5 & -3\end{array}\right)\xrightarrow[F2'=F2/(-3)]{}\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -5 & -3\end{array}\right)\xrightarrow[F3'=F3+5F2]{}\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$

CASO III: $m=2$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 3\end{array}\right)$	En este caso, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**, ya los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden, pero no este valor es menor que el número de incógnitas. $R(A)=R(A^*)=2<Num.\,incógnitas$

Resolvamos el sistema en este caso mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F2'=F2-2F1 \\ F3'=F3-3F1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=F3-F1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observamos que disponemos de un grado de libertad. Así pues:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - 3z = -3 \end{cases} \xrightarrow{z=\mu\in R} \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = -3 + 3\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad con\ \mu \in R$$

PROBLEMA 4: Determina la **posición relativa** de las rectas r y s. Tras ello obtén la ecuación paramétrica de la recta **perpendicular común** a ambas.

$$r \equiv x-1 = y-2 = \frac{z-1}{2} \qquad\qquad s \equiv \frac{3-x}{2} = 3-y = \frac{z+1}{2}$$

Determinaremos primeramente la posición relativa de ambas rectas. Para ello, necesitaremos primeramente extraer un punto y un vector director de cada una de ellas:

$$r \equiv x-1 = y-2 = \frac{z-1}{2} \quad \Rightarrow \quad A(1,2,1) \ y \ \vec{u} = (1,1,2)$$
$$s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \quad \Rightarrow \quad B(3,3,-1) \ y \ \vec{v} = (-2,-1,2)$$

Comparando los vectores directores, observamos que no son proporcionales. En consecuencia, las rectas r y s no serán paralelas ni tampoco coincidentes. Sólo cabe la posibilidad de que se crucen o sean secantes. Para discernir entre estas dos opciones, debemos comprobar si los dos vectores directores y el vector que une los dos puntos de ambas rectas son coplanarios o no. Esto es fácil de averiguar calculando el determinante formado por los tres vectores mencionados:

$$Det\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Así pues, los vectores son coplanarios. En consecuencia, **las rectas r y s son secantes**.

Ahora, para calcular la perpendicular común deberemos calcular, el punto de intersección de ambas rectas y el vector normal del plano que contiene a ambas rectas (ya que este vector será el director de la recta que buscamos). Calculemos primero el punto de corte:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3-2\mu \\ y = 3-\mu \\ z = -1+2\mu \end{cases}$$

Igualamos coordenadas:

$$\left.\begin{array}{r} 1+\lambda = 3-2\mu \\ 2+\lambda = 3-\mu \\ 1+2\lambda = -1+2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \ \mu = 1 \quad \lambda = 0$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos rectas, obtenemos las coordenadas del punto de intersección:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + 0 = 1 \\ y = 2 + 0 = 2 \\ z = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

Así pues, el punto de intersección de r y s es, precisamente, $A(1, 2, 1)$.

Ya sólo quedaría calcular el vector perpendicular a ambas rectas y podremos construir la recta perpendicular común a ambas. Recurriremos para ello al producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + \vec{k} = (4, -6, 1)$$

Por tanto, la ecuación paramétrica de la perpendicular común a r y s será:

$$t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 2 - 6\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad con\ \alpha \in R$$