SOLUCIONES

DOSSIER SEMANAL 8

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hallar los valores de los coeficientes reales *a*, *b*, *c* y *d*, sabiendo que presenta un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$ y que la ecuación tangente a la curva en su punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = 3 - 3x$

Como hemos hecho en otras ocasiones, simplemente se trata de transformar la información proporcionada en relaciones de igualdad o ecuaciones que permitan averiguar los valores de los parámetros.

Dado que presenta un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$, concluimos que la derivada de la función en dicho punto valdrá cero:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

Por otro lado sabemos que tiene un punto de inflexión en $(1, 0)$. Ello implica dos cosas:

1. Que el punto $(1, 0)$ pertenece a la gráfica de la función $f(x)$ y en consecuencia se cumplirá que:

$$f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(1) = a + b + c + d = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b + d = 0$$

2. Que la segunda derivada de la función en el punto $(1, 0)$ valdrá cero por ser un punto de inflexión:

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 6a + 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + b = 0$$

Finalmente, también sabemos que la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 0)$ es $y = 3 - 3x$. Ello quiere decir que la derivada de la función en $(1, 0)$ coincidirá con el valor de la pendiente de la recta, es decir:

$$f'(1) = -3 \quad \Rightarrow \quad 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = -3 \quad \Rightarrow \quad 3a + 2b = -3$$

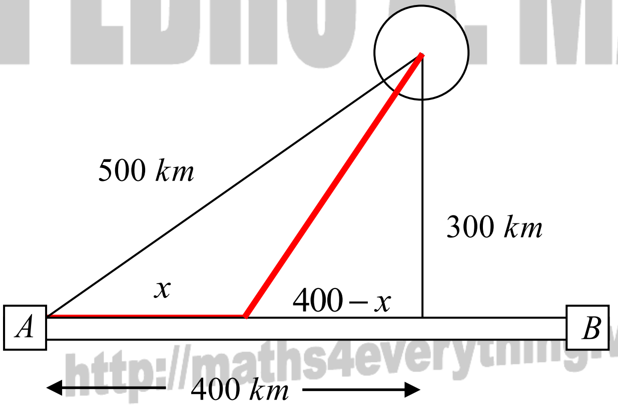
Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por todas las ecuaciones obtenidas, podremos conocer el valor de los parámetros que deseamos averiguar:

$$\left.\begin{array}{l} c = 0 \\ a + b + d = 0 \\ 3a + b = 0 \\ 3a + 2b = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 3a + b = 0 \\ 3a + 2b = -3 \\ \hline -b = 3 \end{array} \Rightarrow \quad b = -3 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2$$

Por tanto, una vez conocidos los valores de los parámetros reales, la función polinómica adoptaría la expresión $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

PROBLEMA 2: En una carretera a través del desierto un vehículo debe ir desde la ciudad A hasta un oasis ubicado a 500 km de ésta. Para ello puede aprovechar una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 km/h. Sabiendo que la distancia más corta del oasis a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 km, determina la ruta que deberá usar el vehículo para ir desde A hasta el oasis en el menor tiempo posible.

Realicemos primeramente un esbozo o esquema de la situación descrita en el problema. Esto nos ayudará a entender el propósito del mismo y nos permitirá resolverlo con más facilidad:



$$500^2 = 300^2 + d^2$$

$$d = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400$$

Tras ello, como podemos apreciar, necesitaremos una única variable para resolver el problema:

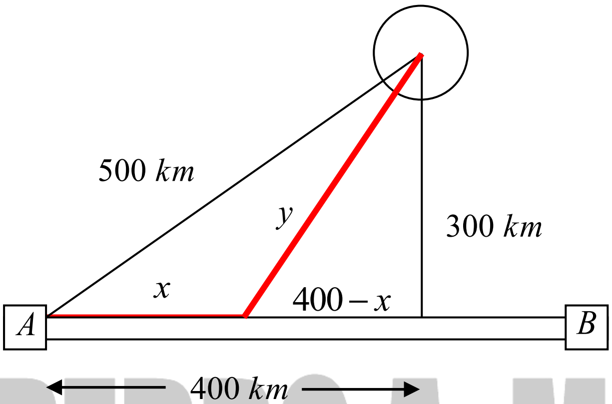
$$x = distancia\ (en\ km)\ desde\ A\ a\ la\ que\ debe\ dejar\ la\ carretera$$

Dado que el objetivo es minimizar el tiempo empleado por el vehículo en llegar al oasis, necesitaremos construir y optimizar la ***función tiempo***:

- Sabemos que por carretera recorrerá x km a una velocidad de 100 km/h. En consecuencia tardará:

$$T_1(x) = \frac{x}{100} \quad (en\ horas)$$

- Aplicando el Teorema de Pitágoras, podemos averiguar los kilómetros que recorrerá el vehículo por desierto:



$$y^2 = 300^2 + (400-x)^2$$
$$y = \sqrt{300^2 + (400-x)^2}$$
$$y = \sqrt{90000 + (400-x)^2}$$

Como la velocidad por desierto es de 60 km/h, el tiempo que tardará en recorrer este tramo será:

$$T_2(x) = \frac{\sqrt{90000 + (400-x)^2}}{60} \quad (en\ horas)$$

Así pues, sumando ambos tiempos, obtendremos nuestra función objetivo:

$$T(x) = \frac{x}{100} + \frac{\sqrt{90000 + (400-x)^2}}{60} \quad (en\ horas)$$

Si derivamos la función que acabamos de construir, tenemos que:

$$T'(x) = \frac{1}{100} + \frac{2\cdot(400-x)\cdot(-1)}{60\cdot 2\cdot\sqrt{90000 + (400-x)^2}} = \frac{1}{100} - \frac{400-x}{60\cdot\sqrt{90000 + (400-x)^2}}$$

Igualando la derivada a cero obtendremos los puntos críticos de la función tiempo:

$$\frac{1}{100} - \frac{400-x}{60\cdot\sqrt{90000 + (400-x)^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{100} = \frac{400-x}{60\cdot\sqrt{90000 + (400-x)^2}} \quad \Rightarrow$$

$$60\cdot\sqrt{90000 + (400-x)^2} = 100\cdot(400-x) \quad \Rightarrow \quad 3\cdot\sqrt{90000 + (400-x)^2} = 5\cdot(400-x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(3\cdot\sqrt{90000+(400-x)^2}\right)^2=(5\cdot(400-x))^2 \quad\Rightarrow\quad 9\cdot\left(90000+(400-x)^2\right)=25\cdot(400-x)^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 810000+9(400-x)^2=25\cdot(400-x)^2 \quad\Rightarrow\quad 810000=25\cdot(400-x)^2-9(400-x)^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 810000=16\cdot(400-x)^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{810000}{16}=(400-x)^2 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{810000}{16}}=400-x \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \pm\frac{900}{4}=400-x \quad\Rightarrow\quad \pm 225=400-x \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=175 \\ x=-625 \end{cases}$$

La solución negativa la descartaremos por no tener sentido en el contexto del problema que trabajamos. Comprobaremos ahora que la otra solución se corresponde con un mínimo de la función tiempo:

	0	175	400
Signo de T'(x)	-		+
Monotonía de T(x)	$\searrow$		$\nearrow$

Así pues, para que el vehículo llegue al oasis desde la ciudad A en el menor tiempo posible, deberá abandonar la carretera tras 175 km.

PROBLEMA 3: Determina si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente tu respuesta:

a) La función $f(x)=(x+1)^{101}$ tiene un punto de inflexión en $(-1,\,0)$.

b) La ecuación $x^5+x-1=0$ tiene exactamente una raíz real entre 0 y 1.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ x-x}{x-sen\ x}=2$

a) **VERDADERO**. Para demostrarlo estudiaremos la curvatura de la función:

$$f(x)=(x+1)^{101} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=101\cdot(x+1)^{100} \quad\Rightarrow\quad f''(x)=10100\cdot(x+1)^{99}$$

Así pues, igualando la segunda derivada a cero, obtendremos los posibles puntos de inflexión:

$$f''(x)=10100\cdot(x+1)^{99}=0 \quad\Rightarrow\quad x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1$$

Comprobaremos que se trata de un punto de inflexión. Dado que la función es polinómica, su dominio es el conjunto de todos los números reales, por lo que en la línea de estudio de la curvatura sólo incluiremos el punto crítico:

$-\infty \qquad -1 \qquad +\infty$

Signo de f''(x)	-	+
Curvatura de f(x)	∩	∪

Por tanto, podemos afirmar que el punto $(-1,\,f(-1)=0)$ se trata de un punto de inflexión.

b) **VERDADERO**. Primeramente comprobaremos que posee alguna solución aplicando el Teorema de Bolzano. Para ello, definimos la función:

$$f(x)=x^5+x-1$$

Podemos ver que:

- La función $f(x)$ es continua en todo R por ser un polinomio y en consecuencia será continua en cualquier intervalo cerrado que consideremos. En particular lo será en $[0, 1]$.
- Vemos que toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo sugerido:

$$f(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$$
$$f(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$$

Así pues, por el Teorema de Bolzano podemos concluir que:

$$\exists c \in (0, 1) \mid f(c) = 0$$

Demostraremos ahora que la solución es única utilizando la técnica de reducción al absurdo. **Supongamos que existen dos soluciones distintas en el intervalo $(0, 1)$ de la ecuación propuesta** que llamaremos c_1 y c_2.

Por ser soluciones, sabemos que verificarán la ecuación, es decir:

$$f(c_1) = 0 \text{ y } f(c_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c_1) = f(c_2)$$

Así pues, observamos que:

- La función $f(x)$ es continua en R y en particular lo será en el intervalo cerrado $[c_1, c_2]$.
- La función $f(x)$ es un polinomio. En consecuencia es derivable en R y en particular lo será en el intervalo abierto (c_1, c_2).
- Además, como hemos visto, se verifica que: $f(c_1) = f(c_2)$

Por tanto, dado que se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle podemos afirmar que $\exists d \in (c_1, c_2) \mid f'(d) = 0$

Ahora bien, por otro lado, si calculamos la derivada de $f(x)$ y la igualamos a cero se observa que:

$$f(x)=x^5+x-1 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=5x^4+1 \quad \Rightarrow \quad 5x^4+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt[4]{\frac{-1}{5}} \notin R$$

Es decir, no existe ningún punto donde la derivada de $f(x)$ se anule. Esto entra en contradicción con lo que acabamos de deducir a través del Teorema de Rolle.

Observamos que, tras suponer que existían dos soluciones distintas de la ecuación propuesta en el intervalo $(0,1)$ hemos llegado a una contradicción lógica. Por tanto, no nos queda más remedio que concluir que nuestra suposición inicial era falsa. **Por todo ello, podemos asegurar que la ecuación $x^5+x-1=0$ tiene una única solución en el intervalo $(0,1)$.**

c) **FALSO**. Calculemos el límite para comprobarlo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x=\left[1^\infty \quad \Rightarrow \quad INDETERMINACIÓN\right]=e^{\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{2x+3-2x+1}{2x-1}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x-1}}=e^2$$

d) **VERDADERO**. Para demostrarlo calcularemos el límite. Dependiendo de la expresión que utilicemos de la derivada de la tangente obtendremos el valor del límite con mayor o menor facilidad.

Opción 1: Donde sólo es necesario aplicar L'Hôpital una vez:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x-x}{x-sen\ x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-cos\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1-cos\ x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot(1-cos\ x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{\cos^2 x\cdot(1-cos\ x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1+1}{1}=2$$

Opción 2: Donde aplicamos L'Hôpital más de una vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\ x - x}{x - sen\ x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 + tg^2\ x - 1}{1 - cos\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{tg^2\ x}{1 - cos\ x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot tg\ x \cdot \left(1 + tg^2 x\right)}{sen\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \left(tg\ x + tg^3 x\right)}{sen\ x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \left(1 + tg^2 x + 3tg^2 x \cdot \left(1 + tg^2 x\right)\right)}{cos\ x} = \frac{2}{1} = 2$$