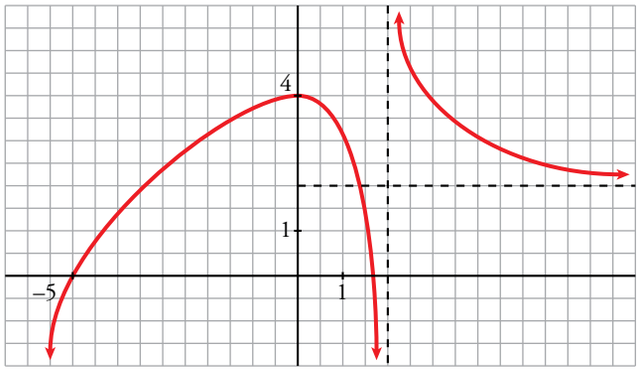
Página 299

Límites y derivadas para representar una función



- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0;\ f'(0) = 0;\ f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4;\ f'(4) = 0$

Página 301

1 a) *Dominio* = $\mathbb{R}$

Es continua y derivable en todo su dominio.

b) *Dominio* = $\mathbb{R} - \{1, 4\}$.

Es continua y derivable en su dominio, $\mathbb{R} - \{1, 4\}$.

c) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{k\pi\}$.

Es continua y derivable en todo su dominio.

d) *Dominio* = $\mathbb{R}$. Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

e) *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Es continua en todo su dominio, $\mathbb{R} - (0, 2)$, pero solo es derivable en $\mathbb{R} - [0, 2]$.

f) *Dominio* = $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Es continua y derivable en todo su dominio.

g) *Dominio* = $\mathbb{R}$

Es derivable y continua en $\mathbb{R}$.

h) *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

Es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

2 a) *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Es continua y derivable en su dominio.

b) Es continua en todo su dominio, $\mathbb{R}$. En $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$ no es derivable.

c) Su dominio de definición es el intervalo $[3, 5]$, en él la función es continua. En $x = 3$ y $x = 5$ no es derivable.

d) En su dominio, $[-13, -12) \cup (12, 13]$, la función es continua. En $x = -13$ y $x = 13$ la función no es derivable.

Página 302

3 a) Es una función par. No es periódica.

b) No es par ni impar. No es periódica.

c) Es impar. No es periódica.

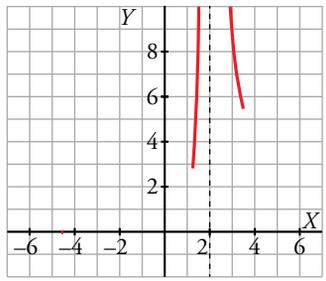
d) No es par ni impar. No es periódica.

e) Es impar. Es periódica de período 2π.

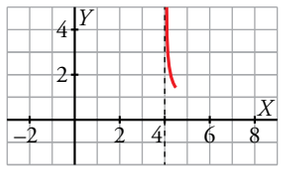
f) La función es par. Es periódica de período 2π.

Página 303

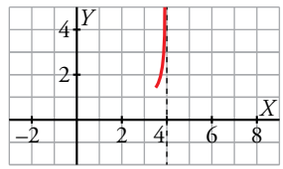
4 a) $x = 2$ es asíntota vertical.



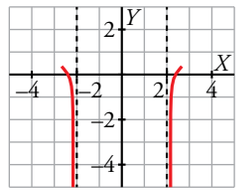
b) $x = 4$ es asíntota vertical.



c) $x = 4$ es asíntota vertical.



d) En $x = -2$ y en $x = 2$ hay una asíntota vertical.



Página 305

5 a) $\lim_{x \to +\infty} (3x^5 - 20x^3) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} (3x^5 - 20x^3) = -\infty$

b) $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to \pm\infty$.

c) La función tiene una asíntota oblicua cuando $x \to \pm\infty$ y es la recta $y = x + 4$.

d) $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to \pm\infty$.

e) $\lim_{x \to +\infty} ln(x^2 + 1) = +\infty$

Lo mismo ocurre cuando $x \to -\infty$.

f) Esta función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \to +\infty$, y la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

g) $\lim_{x \to +\infty} (x\ sen\ x)$ no existe. Análogamente ocurre cuando $x \to -\infty$.

h) $\lim_{x \to +\infty} (x - cos\ x) = +\infty$

6 a) Tiene una asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$. Es la recta $y = 0$.

b) Tiene una asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$. Es la recta $y = 3$.

c) La recta $y = x - 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \to \pm\infty$.

d) Tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido por ser equivalente en el infinito a una función polinómica.

e) La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

La función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \to -\infty$.

f) Se da la misma situación cuando $x \to -\infty$ por ser una función par.

Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más lento.

g) Tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más lento cuando $x \to +\infty$.

Como su dominio de definición es $[0, +\infty)$, no podemos estudiarla cuando $x \to -\infty$.

h) La función $y = tg\, x$ es periódica y no acotada.

No tiene asíntotas ni ramas parabólicas en el infinito.

Página 306

7 a) Hay un máximo en (1, 9) y un mínimo en (3, 5).

Hay un punto de inflexión en (2, 7).

b) Hay un mínimo en (0, 0).

Hay un punto de inflexión en $(-1, ln\, 2)$ y otro en $(1, ln\, 2)$.

8 a) Hay un máximo en (–2, 64), un mínimo en (2, –64), y un punto de inflexión en (0, 0).

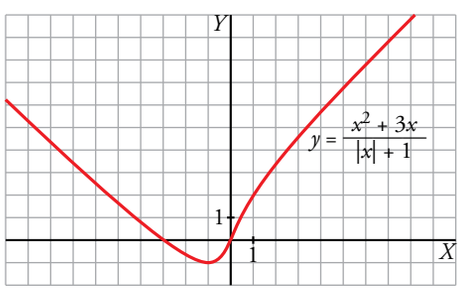
b) Hay un máximo en (0, 0).

c) Hay un punto de inflexión en (0, 0) y un mínimo en $\left(6, \frac{27}{2}\right)$.

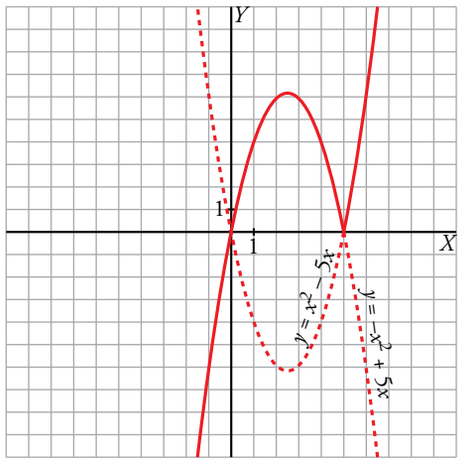
d) No hay puntos singulares.

Página 307

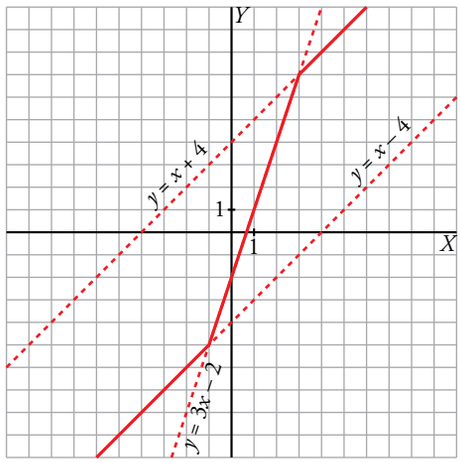
1 a)



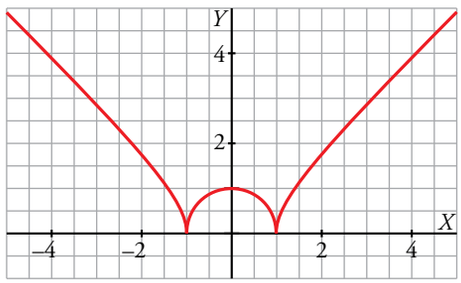
b)



c)

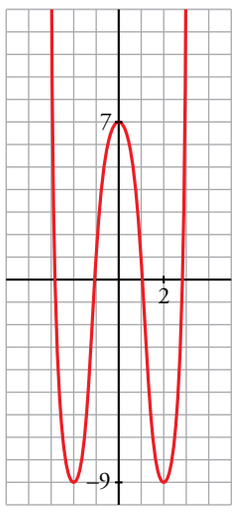


d)

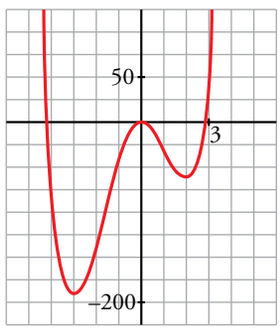


Página 309

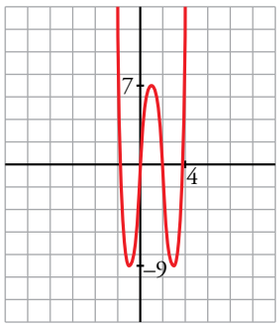
1 a)



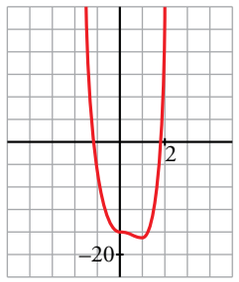
b)



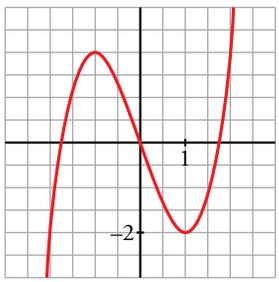
c)



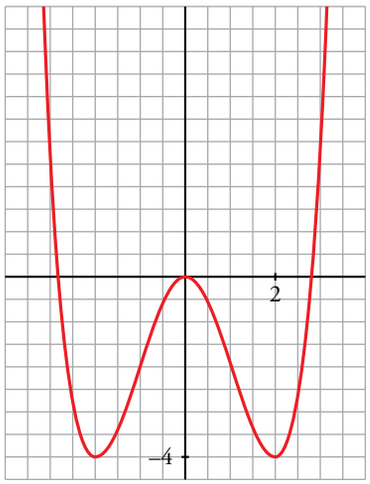
d)



e)

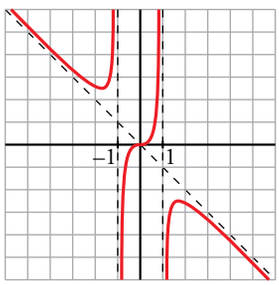


f)

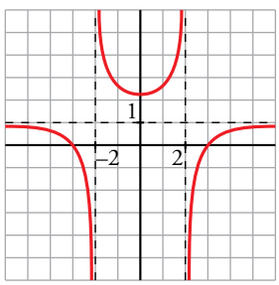


Página 311

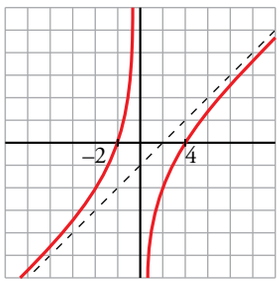
1 a)



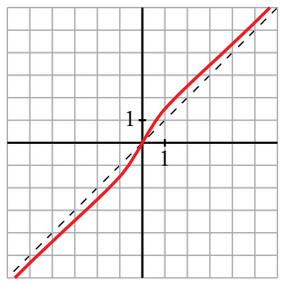
b)



c)

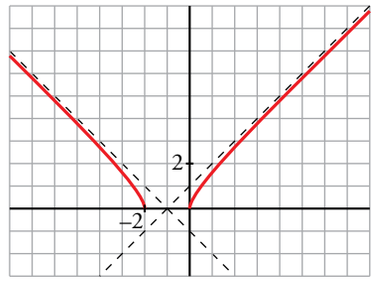


d)

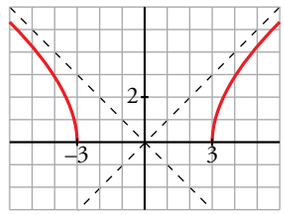


Página 314

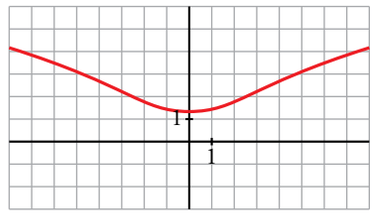
1 a)



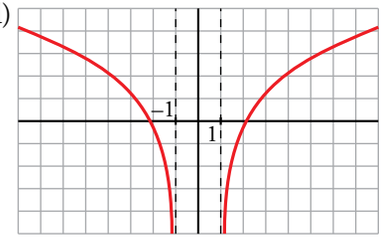
b)



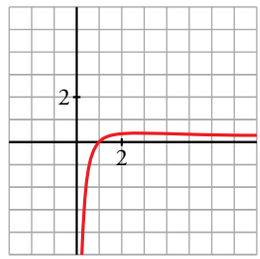
c)



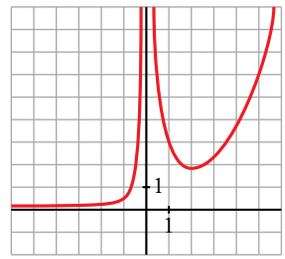
d)



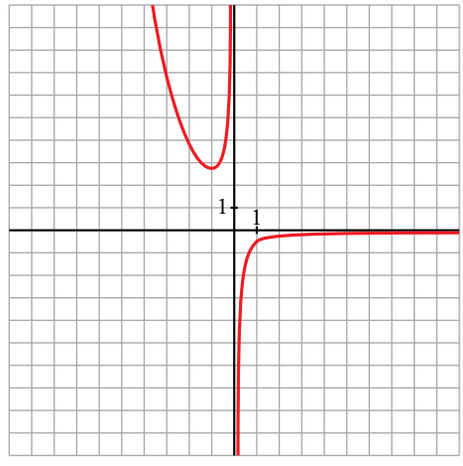
e)



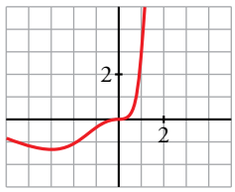
f)



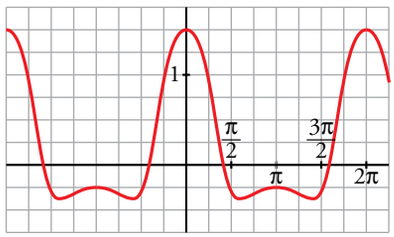
g)



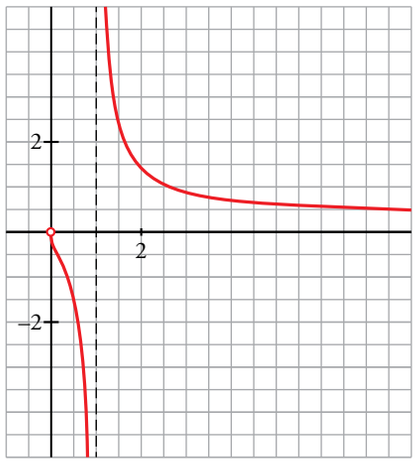
h)



i)

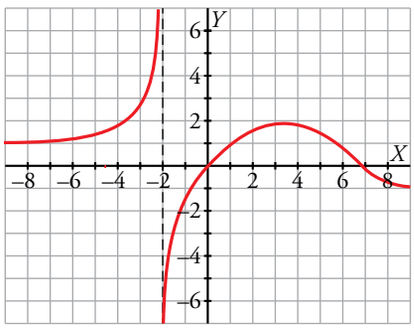


j)

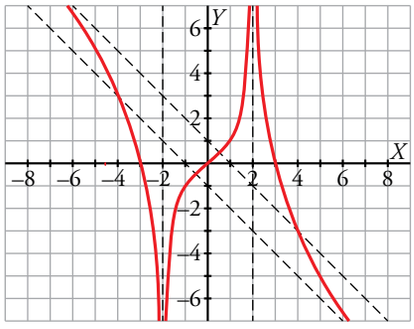


Página 315

1 Hazlo tú.

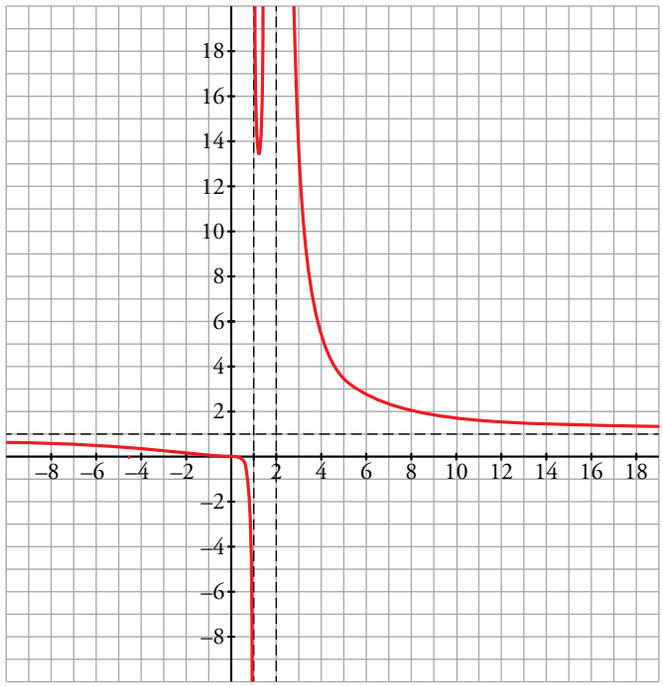


2 Hazlo tú.



Página 316

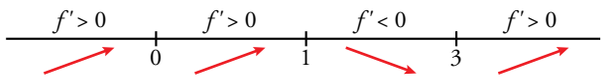
3 Hazlo tú.

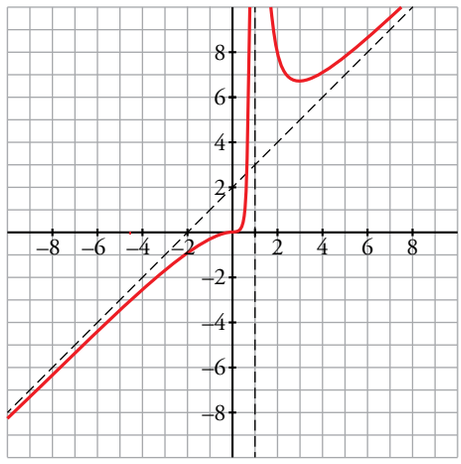


4 Hazlo tú.

- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$.
- Ramas infinitas:

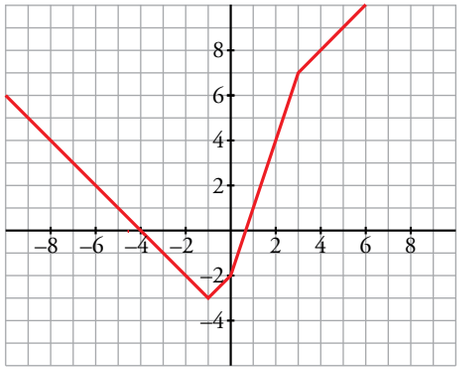
  La recta $y = x + 2$ es la asíntota oblicua de la función.
- Puntos singulares:



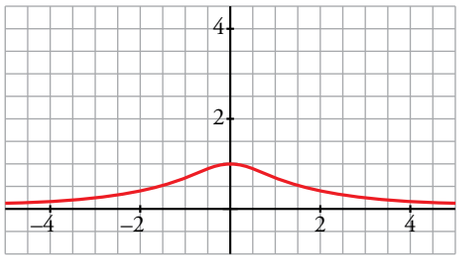


Página 317

5 Hazlo tú.



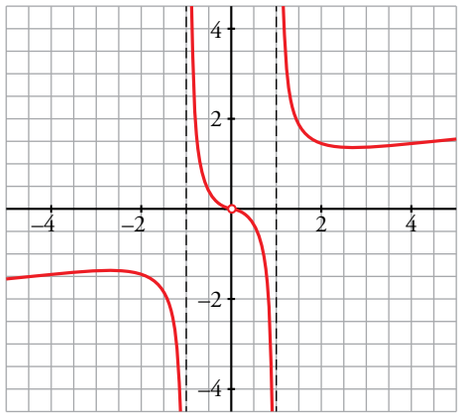
6 Hazlo tú.



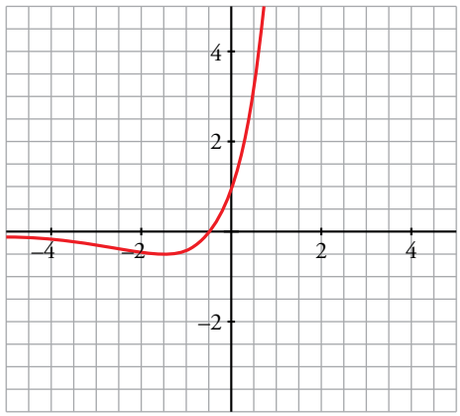
Página 318

7 Hazlo tú.

a)



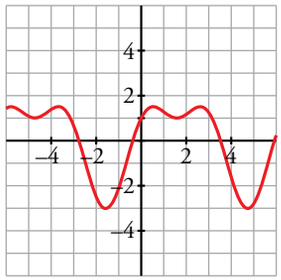
b)



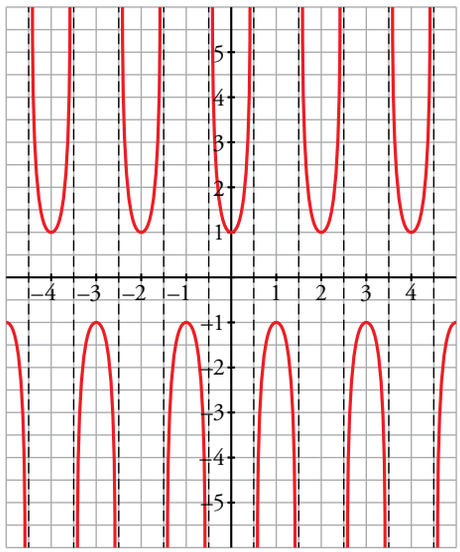
Página 319

8 Hazlo tú.

a)



b)



Página 320

1 • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$. Es derivable en su dominio puesto que no presenta puntos angulosos.

• La recta $y = 4$ es la asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ ya que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$. Se acerca por debajo de la asíntota.

La recta $x = 1$ es la asíntota vertical de la función. La posición respecto de la asíntota es:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

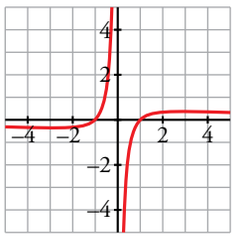
$\lim\limits_{x \to 1^+} = -\infty$

La recta $y = x - 2$ es la asíntota oblicua de la función cuando $x \to +\infty$. La curva corta a la asíntota oblicua en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = \frac{7}{2}$. Después se acerca por debajo de la asíntota.

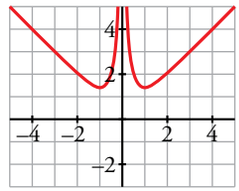
• Los puntos (–1, –1) y (5, –2) son mínimos relativos de la función. Solo tiene un máximo relativo, que se encuentra en el punto (3, 2).

• Finalmente, la función corta a los ejes coordenados en los puntos: (–2, 0), (0, 0), (2, 0), (4, 0) y (6, 0).

2



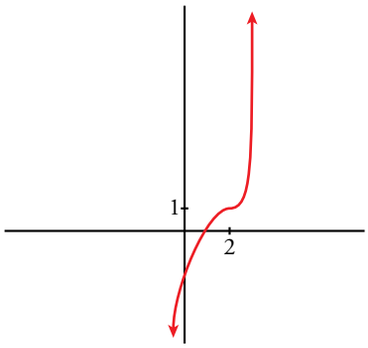
3



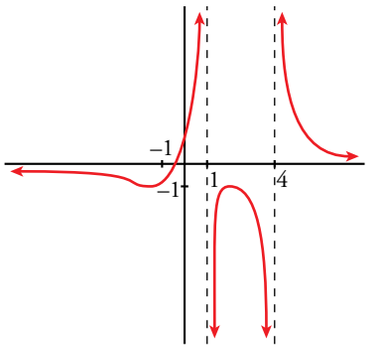
3 El estudio de esta función es idéntico al anterior, con la salvedad de que la función es impar.

Página 321

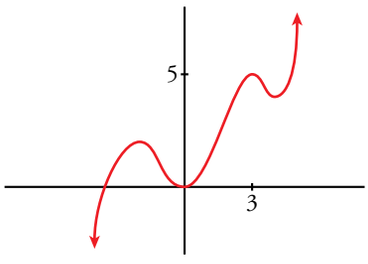
1



2



3



4 a) • Asíntota horizontal: $y = 2$.

Asíntota vertical: $x = 0$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

(si $x \to -\infty$, $f(2) < 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$)

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

- $f(x)$ no tiene puntos singulares.
- Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$

b) • Asíntota horizontal: $y = -2$.

Asíntota vertical: $x = -2$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$

(si $x \to -\infty$, $f(2) > -2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > -2$)

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

- Puntos singulares:

$f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$.

- Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horizontal: si $x \to +\infty$, $y = 0$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- Punto singulares:

$f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$.

$f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$.

- Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

d) • Asíntota vertical: $x = 2$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

- Asíntota oblicua: $y = x$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- $f(x)$ no tiene puntos singulares.
- Creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

5 a) El dominio de definición es el intervalo $[-1, 4]$.

b) El dominio de definición es el intervalo $(7, +\infty)$.

c) x debe estar en el intervalo $[0, 16)$.

d) El dominio de definición es el intervalo $[1, 3)$.

e) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$.

f) El dominio de definición es la unión de todos los intervalos de la forma

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

6 a) Par b) Impar c) Impar

d) Par e) No es simétrica f) Par

7 a) $\frac{2\pi}{3}$ b) 1 c) 1 d) 2π

e) No puede ser periódica. f) No es periódica.

8 a) $x = 1$ y $x = -1$: $\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$, $\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$, $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$

b) $x = 3$ y $x = -3$: $\lim_{x \to -3^-} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-9}} = -\infty$, $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-9}} = +\infty$

c) $x = 1$: $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$, $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty$

d) $x = 2$: $\lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = +\infty$

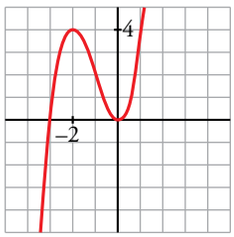
e) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$: $\lim_{x \to (\pi/2)+k\pi} \frac{1}{1-sen^2 x} = +\infty$

f) Como la función es periódica de período 4π, estudiamos las asíntotas verticales $x = \pi$, $x = 3\pi$ y las demás se obtienen usando la periodicidad.

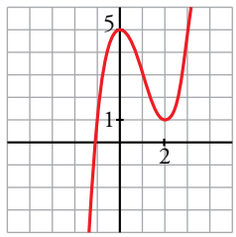
$\lim_{x \to \pi^-} \frac{1}{\cos x/2} = +\infty$, $\lim_{x \to \pi^+} \frac{1}{\cos x/2} = -\infty$

$\lim_{x \to 3\pi^-} \frac{1}{\cos x/2} = -\infty$, $\lim_{x \to 3\pi^+} \frac{1}{\cos x/2} = +\infty$

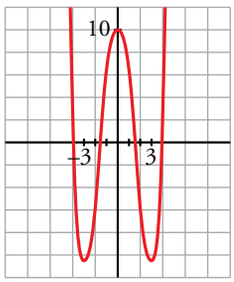
9 a)



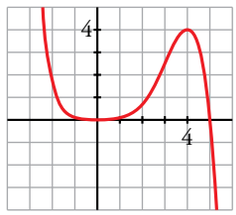
b)



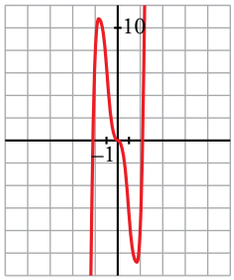
c)



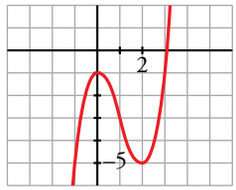
d)



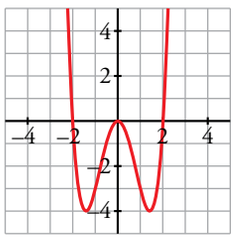
e)



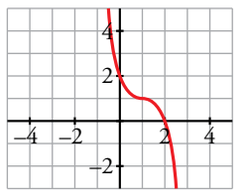
f)



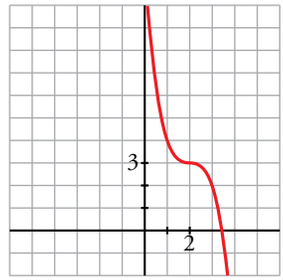
g)



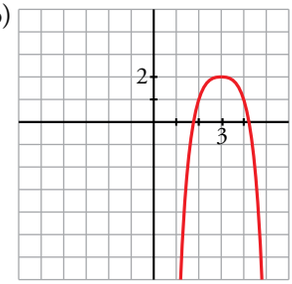
h)



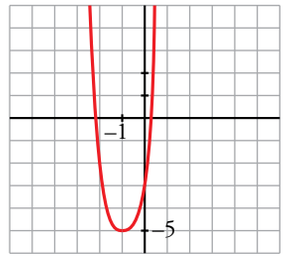
10 a)



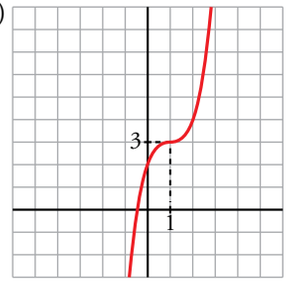
b)



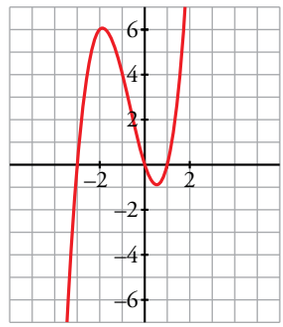
c)



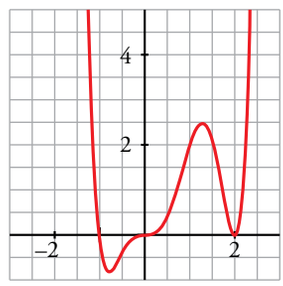
d)



e)

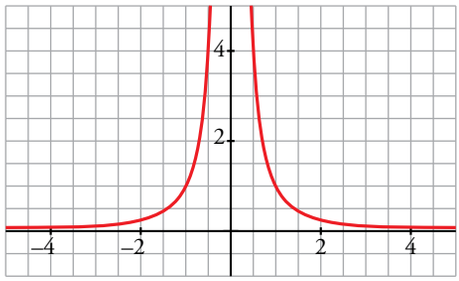


f)

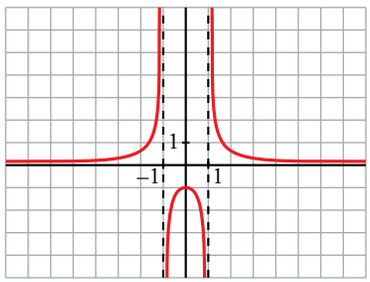


Página 322

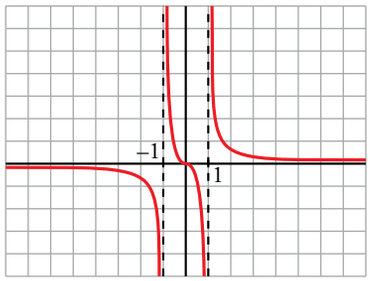
11 a)



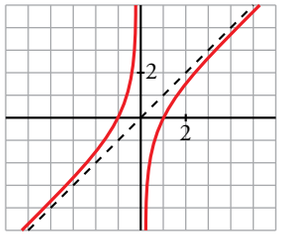
b)



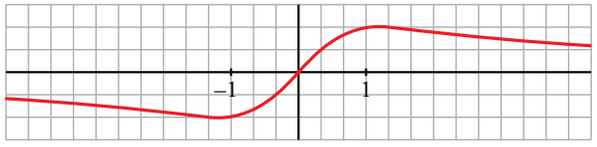
c)



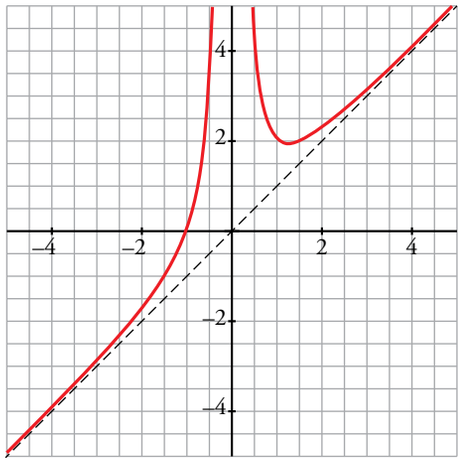
d)



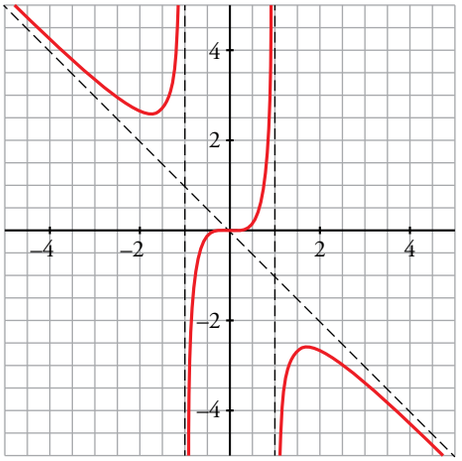
e)



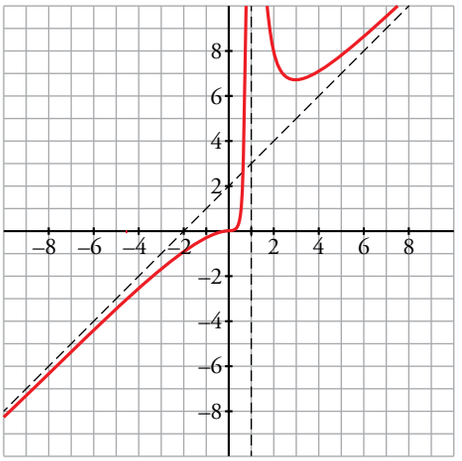
f)



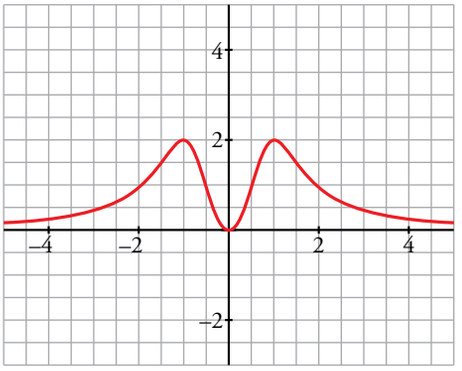
g)



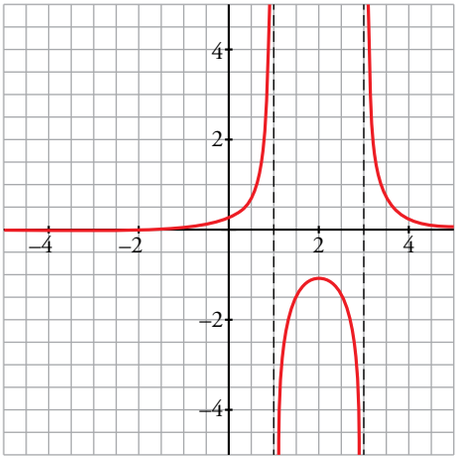
h)



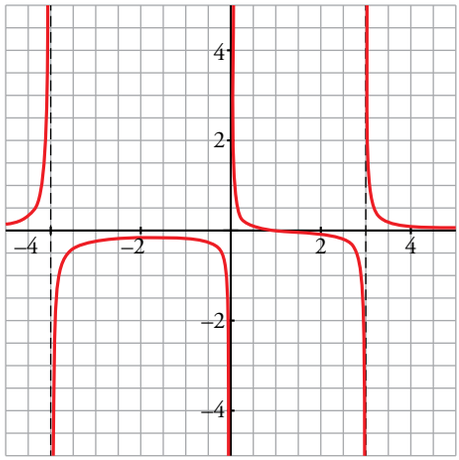
i)



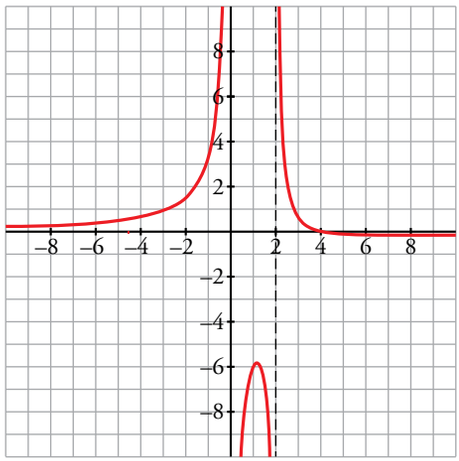
12 a)



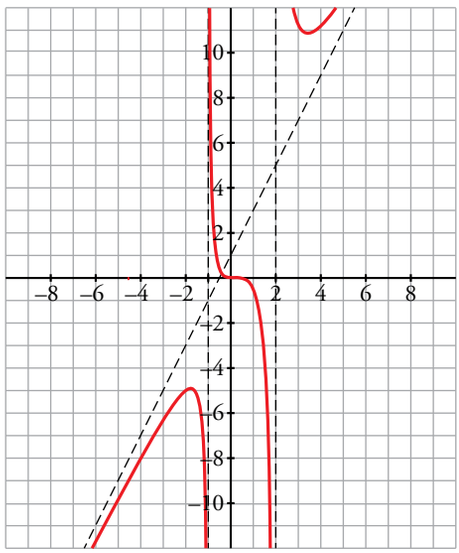
b)



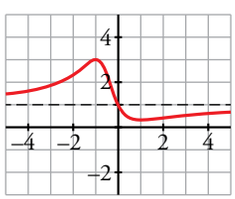
c)



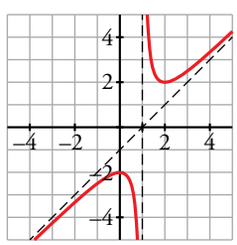
d)



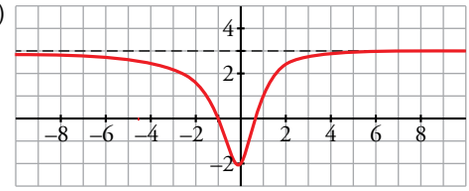
13 a)



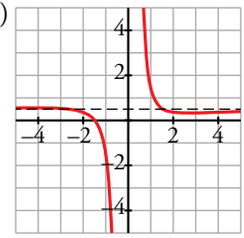
b)



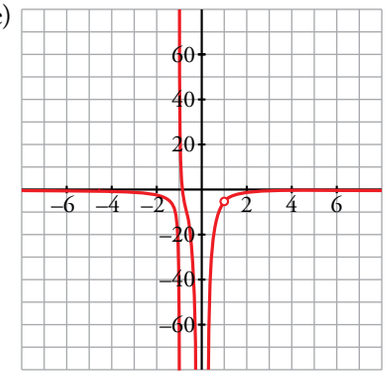
c)



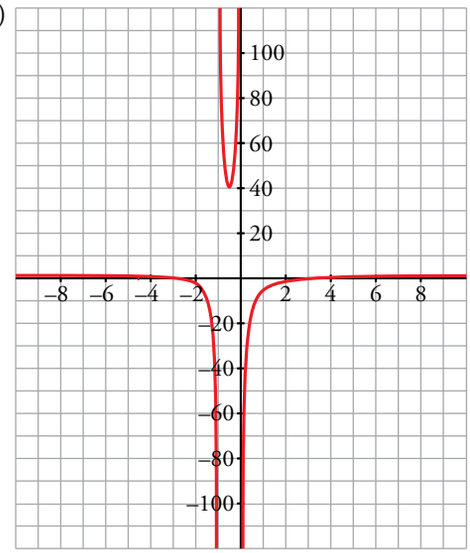
d)



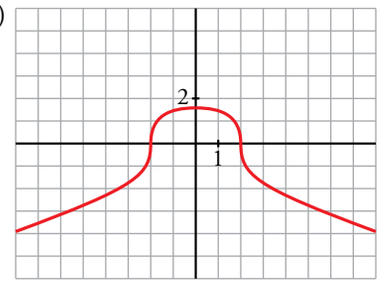
e)



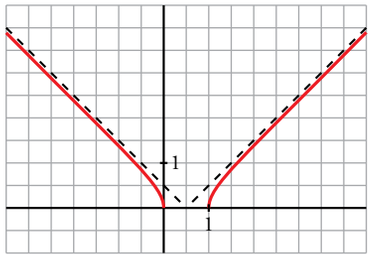
f)



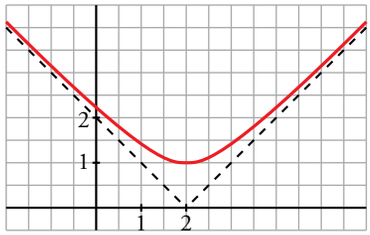
14 a)



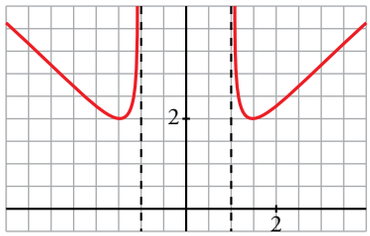
b)



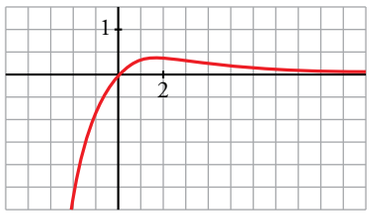
c)



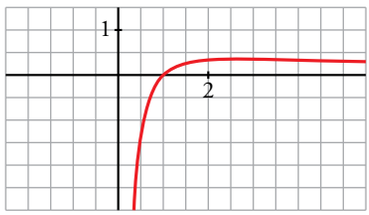
d)



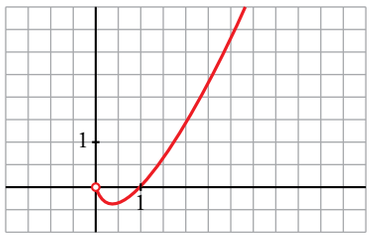
15 a)



b)

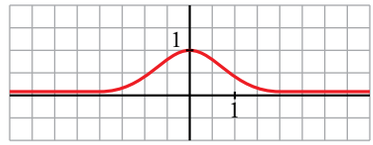


c)

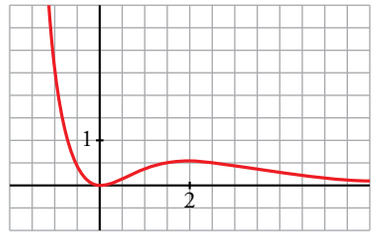


d)

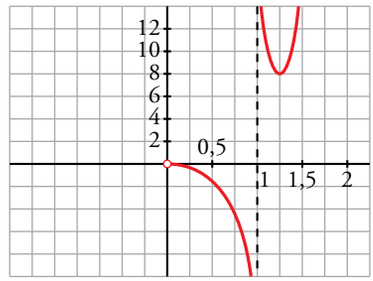
e)



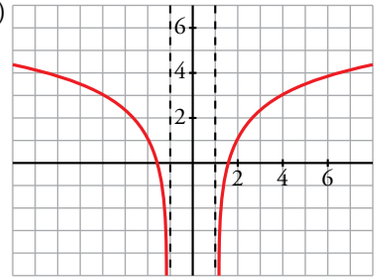
f)



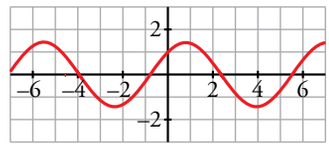
g)



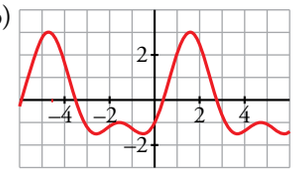
h)



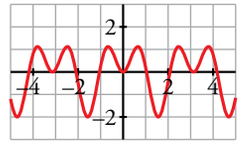
16 a)



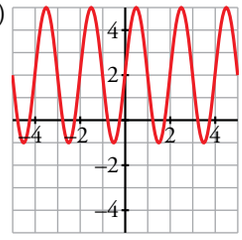
b)



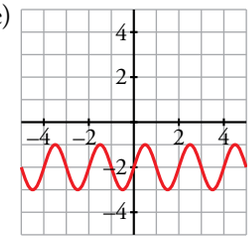
c)



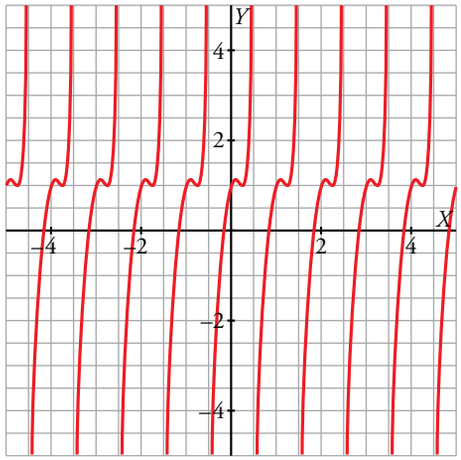
d)



e)



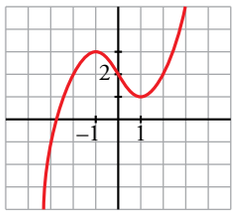
f)



17 Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Decrece en $(-1, 1)$.

Tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, 1)$.

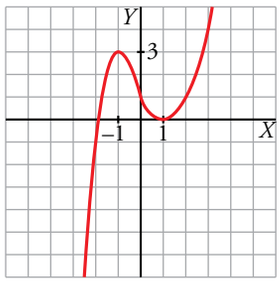
En $(0, 2)$ tiene un punto de inflexión.



18 Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Decrece en $(-1, 1)$.

Máximo en $(-1, 3)$. Mínimo en $(1, 0)$.

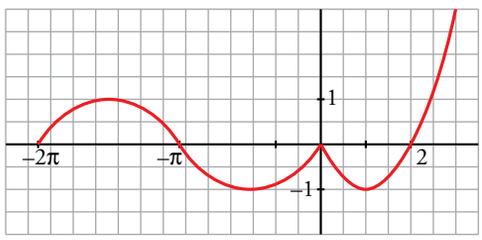
Hay un punto de inflexión en $(0, 1)$.



19 Cortes con los ejes: $(-2\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$

Máximo en $\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$.

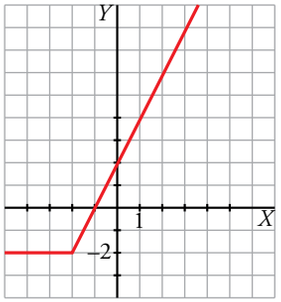
Mínimos en $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ y $(1, -1)$.



20 La función es creciente.

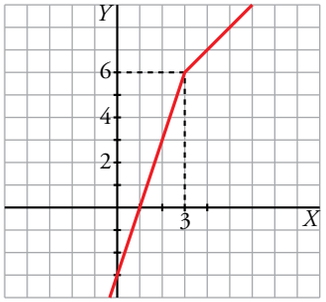
Punto de inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right) \approx (-0{,}58;\ 0{,}75)$

21 a)



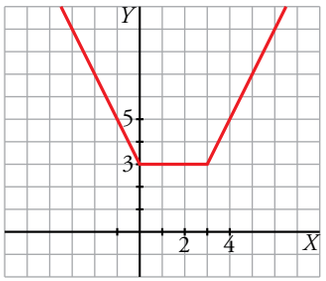
No es derivable en $x = -2$.

b)



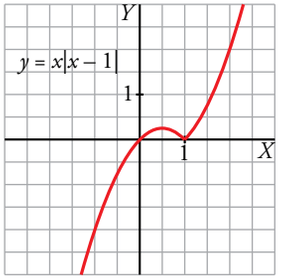
No es derivable en $x = 3$.

c)



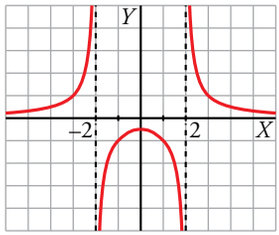
No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 3$.

d)

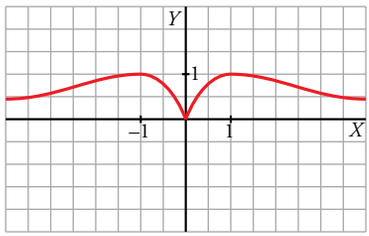


No es derivable en $x = 1$.

22 a)



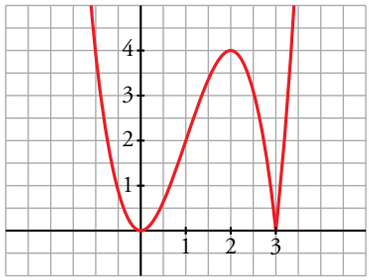
b)



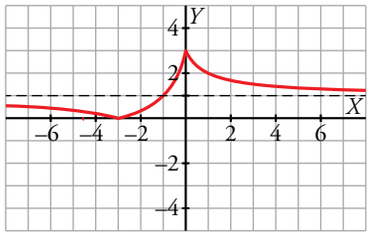
23 a) No es derivable en $x = 3$.

b) $f(x)$ tiene un mínimo en (0, 0) y otro en (3, 0), y tiene un máximo en (2, 4).

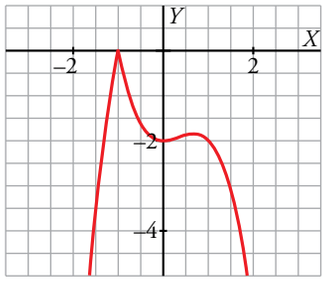
c)



24



25



Página 323

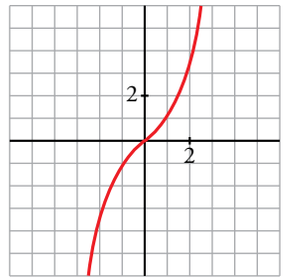
26 a) ② b) ⑥ c) ⑤

d) ① e) ③ f) ④

27 $senh\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Para todo x, $f(x)$ es creciente.

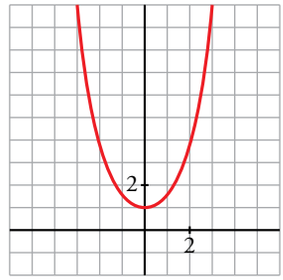
Hay un punto de inflexión en (0, 0).



$cosh\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Hay un mínimo en (0, 1).

No hay puntos de inflexión.



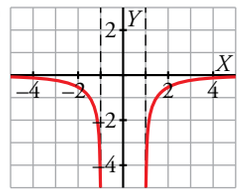
28 a) Asíntota vertical: $x = 0$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y < 0)$.

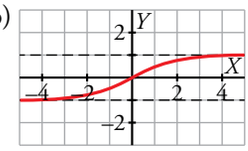
b) Asíntota vertical: $x = 0$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y < 0)$.

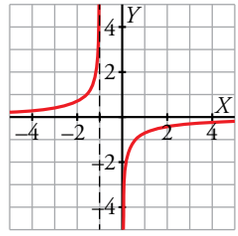
29 a)



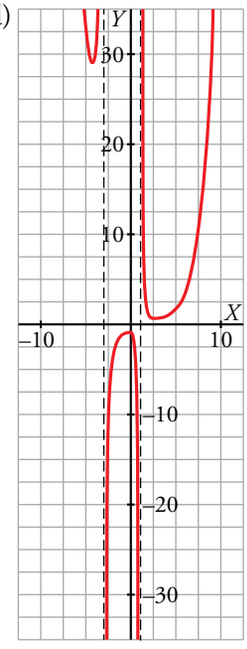
b)



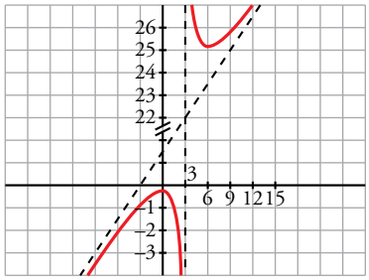
c)



d)



30 $k = 3$

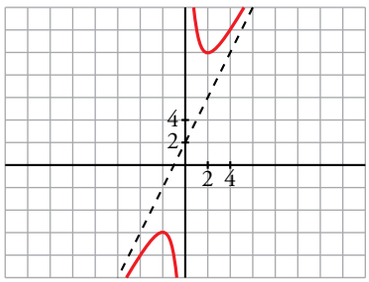


31 a) $a = 1$

b) $x = 0$ es un mínimo relativo.

$x = 1$ es un máximo relativo.

32 $a = 2,\ b = 2$



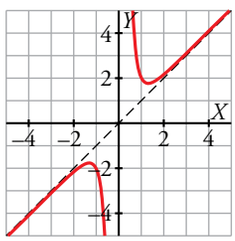
33 $a = -1,\ b = 0,\ c = -4$

34 a) $a = 3$

$x = -1$ y $x = 1$ son máximos relativos.

b) $x = 0$ es la asíntota vertical.

$y = x$ es la asíntota oblicua de la función.

c) 

35 a) $y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$ b) El punto es $Q\left(1, \frac{-22}{9}\right)$.

c) Puntos $Q\left(1, \frac{-22}{9}\right)$ y $R\left(\frac{16}{5}, 0\right)$.

36 a) La concentración de nitrógeno es mínima para $t = 0$ y su valor es $N(0) = 20$.

b) $\lim_{t \to +\infty} \frac{60}{1 + 2e^{-t}} = 60$

Página 324

37 $f(x)$ será, al menos, de grado 5.

Sí, podría haber un mínimo más alto que un máximo.

38 a) Imposible. b) Probable. c) Probable.

d) Probable. e) Probable. f) Seguro.

g) Seguro. h) Seguro. i) Probable.

j) Probable.

39 Tendrá, como máximo, dos puntos de inflexión.

40 $y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

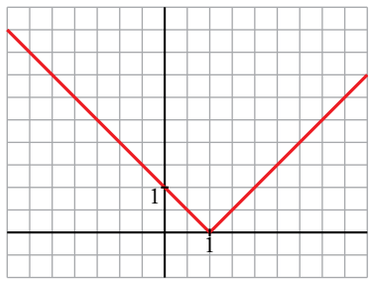
$y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

41 La gráfica es cóncava en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y es convexa en $(-2, 2)$. Los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ son puntos de inflexión (son también mínimos relativos).

42 En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

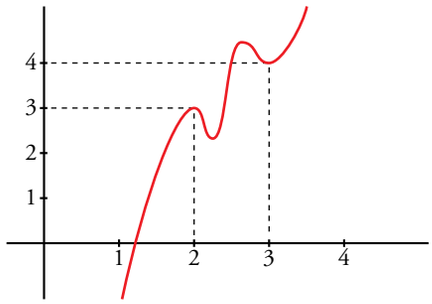
43 Asíntotas verticales puede tener infinitas. Asíntotas horizontales puede tener, como máximo, dos.

44 $y = |x - 1|$



45 Por ejemplo, $y = (x - 1)^3$.

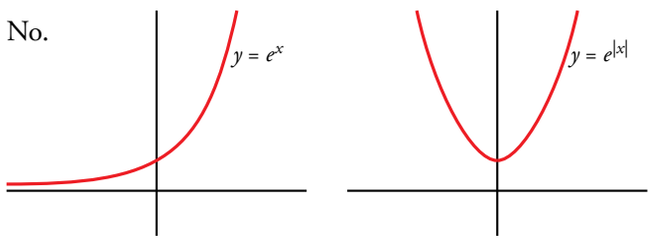
46 Tendría, como mínimo, grado 5.



47 No tiene asíntotas verticales ni horizontales.

$y = x$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$. No hay asíntota oblicua hacia $-\infty$.

48 No.



49 • $y = ln\,|x|$ es la c).

• $y = |ln\,x|$ es la a).

b) $y = |ln\,|x||$

d) $y = \dfrac{1}{|x|}$

50 a) La gráfica de f es simétrica respecto al eje Y.

b) La gráfica de f es simétrica respecto al eje Y.

c) La gráfica de f es simétrica respecto al origen de coordenadas.

d) La gráfica de f es simétrica respecto al origen de coordenadas.

51 a) $-|f(x)|$ b) $f(-x)$ c) $|f(x)|$ d) $f(|x|)$

Página 325

52 a) $h(x)$ b) $g(x)$ c) $f(x)$

53 a) $y = |x + 1|$

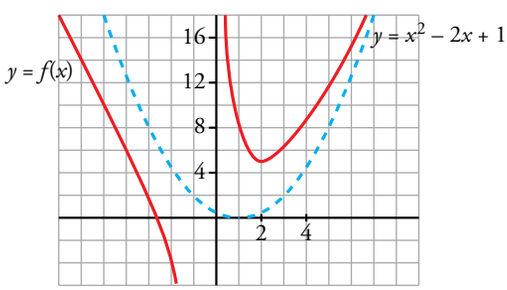
b) $y = |x - 3|$

c) $y = x + 2 \quad y = -x - 2$

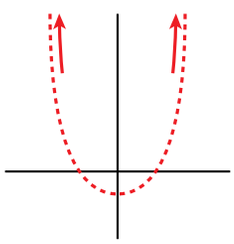
d) $y = 2x - \dfrac{1}{4} \quad y = -2x + \dfrac{1}{4}$

54 a) $y = x^2 - 2x + 1$

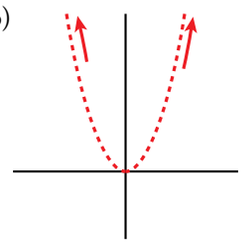
b)



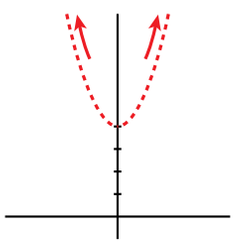
55 a)



b)

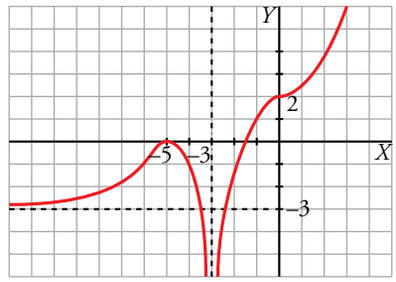


c)



Autoevaluación

1



2 • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Es impar, continua y derivable en su dominio.

• Tiene dos asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

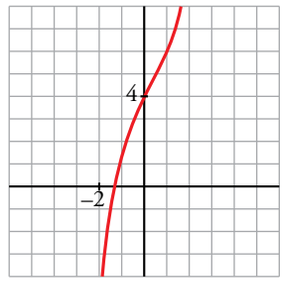
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal de la función cuando $x \to \pm\infty$.

• Es creciente en los intervalos $(-\infty, 2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

3 No tiene máximos ni mínimos.

Hay un punto de inflexión en $(0, 4)$.

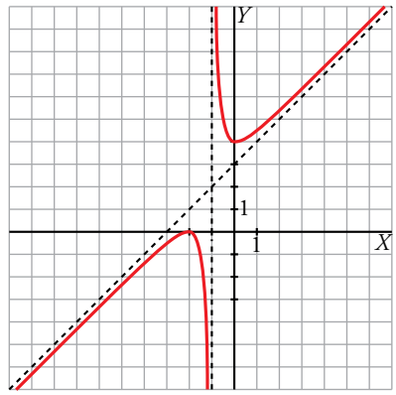


4 Asíntota vertical: $x = 1$

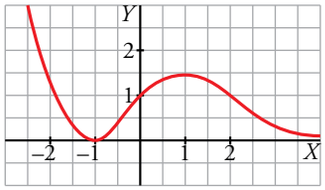
No tiene asíntota horizontal:

La asíntota oblicua es $y = x + 3$.

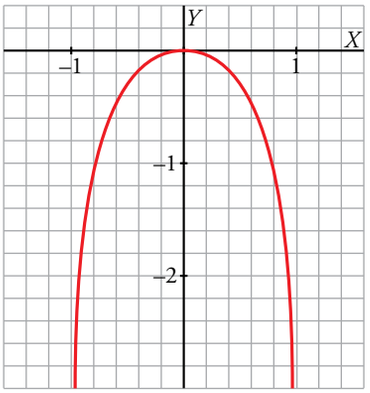
Tiene un máximo en $(-2, 0)$ y un mínimo en $(0, 4)$.



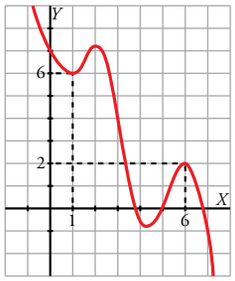
5



6 El único punto de corte con los ejes es (0, 0) y es un máximo.

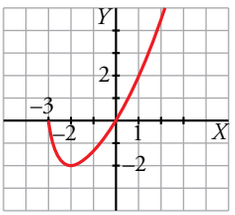


7

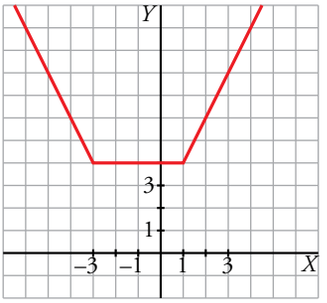


8 Hay un mínimo en (–2, –2).

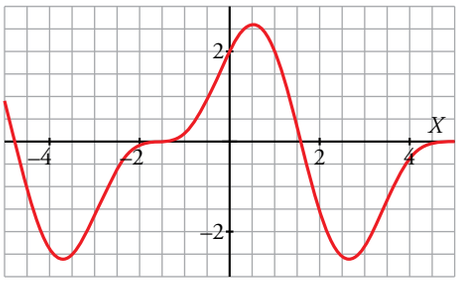
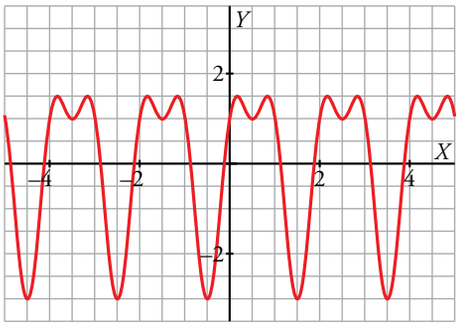
La función no tiene asíntotas.



9



10 a)



b)