DOSSIER SEMANAL 10

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Determina la **posición relativa** de los tres planos siguientes en función del parámetro real *a:*

$$\pi_1 \equiv ax+2y-z=2a \qquad \pi_2 \equiv x+ay=2a+1 \qquad \pi_3 \equiv ax-2y+z=-2$$

Tras ello, considera a = 1 y contesta a las siguientes preguntas de forma razonada:

a) Expresa el plano π_3 en su **ecuación paramétrica**

b) Determina un vector **ortonormal** al plano π_1

c) Determina el punto A de **intersección** de los tres planos

d) Escribe la **ecuación continua** de la recta que pasa por A y es perpendicular a π_3

e) Determina B', el **punto simétrico** de B=(-2,-2,-2) respecto al plano π_1

Primeramente, razonaremos la posición relativa de los tres planos en función del parámetro real **a**. En realidad, se trata simplemente de discutir un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

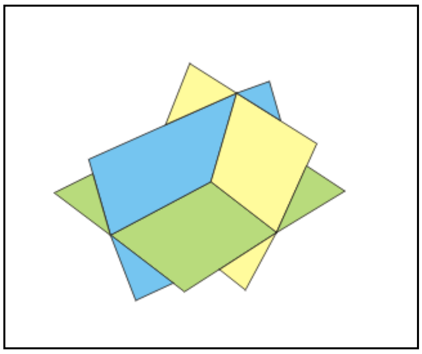
$$\begin{cases} \pi_1 \equiv ax+2y-z=2a \\ \pi_2 \equiv x+ay=2a+1 \\ \pi_3 \equiv ax-2y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 2a \\ 1 & a & 0 & 2a+1 \\ a & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Determinaremos el valor de a que nos permitirá discutir el sistema:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

Caso I: $a \neq 0$

En este caso, el rango de la matriz de coeficientes es 3 y coincide con el rango de la matriz del sistema y el número de incógnitas. Así pues, estamos ante un sistema compatible determinado. Esto se traduce geométricamente en una **posición de triedro**, es decir, los tres planos dados **se cortan en un único punto**.



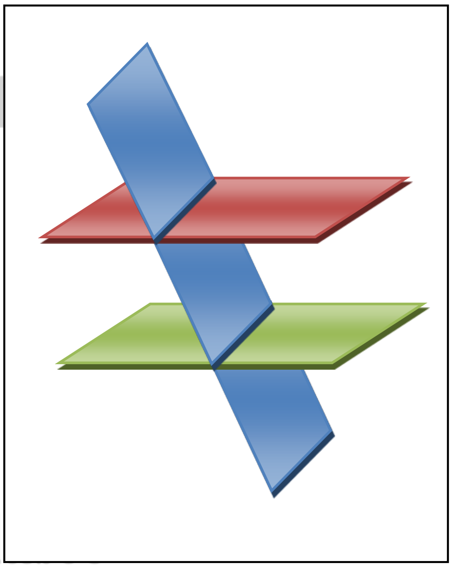
Caso II: $a = 0$

En este caso particular, estudiaremos la posición relativa de los planos de dos en dos. Así pues, se observa que:

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv 2y - z = 0 \\ \pi_2 \equiv x = 1 \\ \pi_3 \equiv -2y + z = -2 \end{cases}$$

Por simple comparación de las ecuaciones vemos que:

- π_1 y π_3 son paralelos (pues tienen vectores normales proporcionales y diferente término independiente)
- π_1 y π_2 son secantes (pues son vectores normales no son proporcionales)
- π_2 y π_3 son secantes (pues los vectores normales no son proporcionales)



DOSSIER SEMANAL 10

MATEMÁTICAS II
Por Pedro A. Martínez

Una vez discutida la posición relativa según los valores de a, consideramos el valor de $a=1$ y responderemos a los distintos apartados propuestos:

a) Para expresar π_3 en su forma paramétrica simplemente hemos de resolver el sistema de una ecuación con dos parámetros de libertad:

$$\pi_3 \equiv x-2y+z=-2 \quad \overset{\substack{y=\lambda \\ z=\mu}}{\Longrightarrow} \quad \pi_3 \equiv \begin{cases} x=-2+2\lambda-\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases} \qquad con\ \lambda,\mu \in \Re$$

b) El vector normal del plano $\pi_1 \equiv x+2y-z=2$ es $\vec{n}_1(1,2,-1)$. Sólo faltaría hacerlo unitario para que fuera ortonormal:

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{1+4+1}=\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{u}=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{-\sqrt{6}}{6}\right)$$

c) Para hallar el punto de intersección de los tres planos debemos resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de dichos planos:

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x+2y-z=2 \\ \pi_2 \equiv x+y \quad\ =3 \\ \pi_3 \equiv x-2y+z=-2 \end{cases} \overset{F3'=F3+F1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y \quad\ =3 \\ 2x \quad\quad\ =0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z=4 \\ y=3 \\ x=0 \end{cases}$$

Por tanto, el punto de corte de los tres planos es: A(0,3,4)

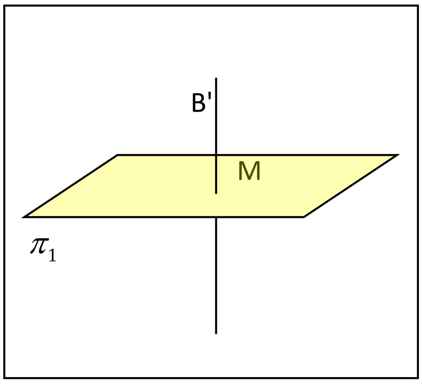
d) Al ser perpendicular a π_3 su vector director será $\vec{d}_r=\vec{n}_3=(1,-2,1)$. Así pues, la ecuación continua de la recta pedida será:

$$r: \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-4}{1}$$

e) Resolveremos el problema mediante un proceso constructivo.

Paso 1: Determinamos la ecuación paramétrica de la recta perpendicular al plano π_1 que pasa por B'.

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \quad con\ \lambda \in \Re \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$



Paso 2: Calculamos el punto M de intersección de dicha recta con el plano π_1

$$\pi_1 \equiv x + 2y - z = 2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2 + \lambda + 2(-2 + 2\lambda) - (-2 - \lambda) = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda = 1$$

Sustituimos el valor del parámetro en la recta para obtener el punto M:

$$\begin{cases} x = -2 + 1 = -1 \\ y = -2 + 2 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M(-1,0,-3) \\ z = -2 - 1 = -3 \end{cases}$$

Paso 3: El punto M resulta ser el punto medio entre B' y su simétrico B. Así pues:

$$\frac{B + B'}{2} = M \quad \Rightarrow \quad B = 2M - B' = (-2,0,-6) - (-2,-2,-2) \quad \Rightarrow \quad B = (0,2,-4)$$

PROBLEMA 2: Determina la **posición relativa** de las rectas en función de $a \in R$:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{a} = \frac{1-z}{2} \qquad s:(x,y,z) = (0,-1,1) + \lambda \cdot (-2,a,2) \quad \lambda \in \Re$$

Tras ello, para a = 1 determina la ecuación de la **perpendicular común** a r y s.

Primeramente, razonaremos la posición relativa de ambas rectas en función del parámetro real **a** del cual depende.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{a} = \frac{z-1}{-2} \quad \Rightarrow \quad P_r(1,3,1) \quad \vec{d}_r(2,a,-2)$$

$$s:(x,y,z) = (0,-1,1) + \lambda \cdot (-2,a,2) \quad \Rightarrow \quad P_s(0,-1,1) \quad \vec{d}_s(-2,a,2)$$

Veamos cuando los vectores son paralelos:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{d}_r(2,a,-2) \\ \vec{d}_s(-2,a,2)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{-2} = \frac{a}{a} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \frac{2}{-2} = \frac{a}{a} \Rightarrow 2a = -2a \Rightarrow a = 0$$

Caso I: $a \neq 0$

En este caso, los vectores directores no son paralelos y las rectas se cortarán o se cruzarán. Para diferenciar ambas posiciones lo que haremos será construir un vector que una un punto de r con otro de s y comprobar si dicho vector es coplanario con los dos directores:

$$P_rP_s = (0,-1,1) - (1,3,1) = (-1,-4,0) \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 2 & a & -2 \\ -2 & a & 2 \end{vmatrix} = -2a - 16 - 2a + 16 = -4a = 0$$

$$\Rightarrow \quad -4a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

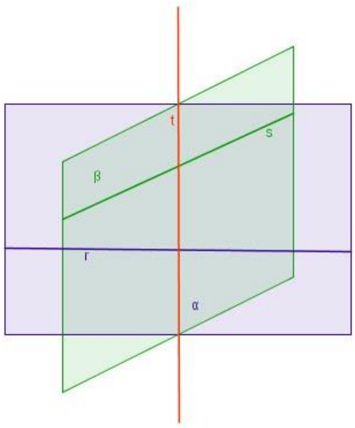
Pero dado que estamos dentro de un caso en el que a es distinto de cero, podemos concluir que el determinante calculado tampoco puede ser cero y por tanto los vectores no son coplanarios. En conclusión, **las rectas se cruzan**.

Caso II: $a = 0$

En este caso, los vectores directores son paralelos y las rectas pueden ser paralelas o coincidentes. Para diferenciar estas posiciones simplemente debemos extraer un punto de una recta y comprobar si pertenece también a la otra.

$$¿P_r(1,3,1) \in s? \quad \Rightarrow \quad \frac{0-1}{2} = \frac{-1-3}{0} = \frac{1-1}{2} \quad \Rightarrow No\ es\ cierto \quad \Rightarrow \quad P_r(1,3,1) \notin s$$

En consecuencia, **<u>las rectas son paralelas</u>**.



Consideramos ahora el valor de $a = 1$ y responderemos al apartado propuesto. Para obtener la ecuación de la perpendicular común hemos de calcular la ecuación de dos planos. El plano α que contiene a r y a la perpendicular común; y el plano β que contiene a s y a la perpendicular común. La intersección de ambos planos proporcionará la recta perpendicular común a r y s.

Antes que nada, necesitaremos calcular el vector director de la perpendicular común, pero esto se consigue fácilmente mediante el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas:

$$\vec{u} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4,0,4) \quad \Rightarrow \quad un\ vector\ paralelo\ sería\ (1,0,1)$$

<u>Plano que contiene a r y a la perpendicular común</u>:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-2} \quad \Rightarrow \quad P_r(1,3,1) \quad \vec{d}_r(2,1,-2)$$

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x+4y+z-12=0$$

Plano que contiene a s y a la perpendicular común:

$$s:(x,y,z)=(0,-1,1)+\lambda\cdot(-2,1,2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_s(0,-1,1) \\ \vec{d}_s(-2,1,2) \end{cases}$$

$$\beta : \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x-4y+z-5=0$$

Así pues, la perpendicular común a r y s será:

$$t \equiv \begin{cases} -x+4y+z-12=0 \\ -x-4y+z-5=0 \end{cases}$$

PROBLEMA 3: Calcula la **derivada** de las siguientes funciones reales de variable real:

1) $f(x) = arcsen\left(\sqrt{x}\right)$ 2) $f(x) = \sqrt{2} \cdot arctg\left(\sqrt{2x}\right)$ 3) $f(x) = arctg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

4) $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}$ 5) $f(x) = \dfrac{3-2x}{3+2x}$ 6) $f(x) = 2 \cdot sen\, x \cdot \cos x$

Para el cálculo de estas derivadas debemos tener presente la regla del producto y cociente, además de las funciones arco que recordamos a continuación:

$$g(x) = arcsen(f(x)) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$$

$$g(x) = arccos(f(x)) \quad \Rightarrow \quad g'^{(x)} = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$$

$$g(x) = arctg(f(x)) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$$

Así pues, teniendo todo esto en cuenta, ya podemos realizar el cálculo de derivadas propuesto:

1) $f(x) = arcsen\left(\sqrt{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x \cdot (1-x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

2) $f(x) = \sqrt{2} \cdot arctg\left(\sqrt{2x}\right)$

$$f'(x) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{2x}\right)^2} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{(1+2x) \cdot \sqrt{x}}$$

3) $f(x) = arctg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{\frac{-4x}{(1-x)^2}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = -\frac{1}{2x}$$

4) $f(x)=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}$

$$f(x)=x^{1/16} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{16}x^{-15/16}$$

5) $f(x)=\dfrac{3-2x}{3+2x}$

$$f'(x)=\frac{-2\cdot(3+2x)-(3-2x)\cdot 2}{(3+2x)^2}=\frac{-12}{(3+2x)^2}$$

6) $f(x)=2\cdot sen\,x\cdot\cos x$

$$f(x)=sen\,(2x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2\cdot\cos(2x)$$