PROBLEMA 1: Discute y resuelve (siempre que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del valor del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} x + \quad ay + a^2 z = 1 \\ x + \quad ay + \; az = a \\ x + a^2 y + a^2 z = a^2 \end{array}\right\}$$

Discutiremos el sistema utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x + \quad ay + a^2 z = 1 \\ x + \quad ay + \; az = a \\ x + a^2 y + a^2 z = a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 & a^2 \end{array}\right) = A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real a:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = a^2 \cdot (a-1)^2$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro a, anulan este determinante. Es decir:

$$|A| = a^2 \cdot (a-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad ó \quad a = 1$$

Esto nos permite distinguir tres casos posibles:

CASO I: $a \neq 0 \quad y \quad a \neq 1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 & a^2 \end{array}\right)$	En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**. $R(A) = R(A^*) = 3 = NUM.INCÓGNITAS$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{l}
x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a & a \\ a^2 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2 \cdot (a-1)^2} = \dfrac{0}{a^2 \cdot (a-1)^2} = 0 \\
y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2 \cdot (a-1)^2} = \dfrac{a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}}{a^2 \cdot (a-1)^2} = \dfrac{a \cdot (a-1)^2 \cdot (a+1)}{a^2 \cdot (a-1)^2} = \dfrac{a+1}{a} \\
z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2 \cdot (a-1)^2} = \dfrac{a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{a^2 \cdot (a-1)^2} = \dfrac{-a \cdot (a-1)^2}{a^2 \cdot (a-1)^2} = \dfrac{-1}{a}
\end{array}\right\} \Rightarrow (x, y, z) = \left(0, \dfrac{a+1}{a}, \dfrac{-1}{a}\right)$$

CASO II: $a = 0$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	En este caso, el sistema es claramente **INCOMPATIBLE**, ya que si despejamos x de la primera ecuación y de la segunda obtenemos valores distintos. Así pues, aquí se cumple que: $1 = R(A) \neq R(A^*) = 2$

CASO III: $a=1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$	En este caso, el sistema es **<u>COMPATIBLE INDETERMINADO</u>**, ya que todas las ecuaciones son idénticas. De hecho se tiene que: $R(A)=R(A^*)=1<NUM.INCÓGNITAS$

Resolvamos el sistema en este caso. Dado que el rango del sistema es 1, sabemos que sólo necesitaremos una ecuación para resolver el sistema y en consecuencia dos de las incógnitas actuarán como parámetros reales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \quad x+y+z=1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=1-\lambda-\mu \end{cases} \qquad con \quad \lambda,\mu\in\Re$$

PROBLEMA 2: Dada siguiente matriz donde x es un valor real:

$$A=\begin{pmatrix} sen\ x & -\cos x & 0 \\ \cos x & sen\ x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Calcula para qué valores reales del parámetro x, la matriz A es singular.

b. Calcula su inversa cuando $x=\pi$

a) La matriz A será invertible si su determinante es distinto de cero. Simplemente calcularemos el determinante de A y comprobaremos que no es cero valga lo que valga x:

$$|A|=\begin{vmatrix} sen\ x & -\cos x & 0 \\ \cos x & sen\ x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} sen\ x & -\cos x \\ \cos x & sen\ x \end{vmatrix}=2\cdot\left(sen^2 x+\cos^2 x\right)=2\cdot 1=2\neq 0$$

Así pues, **la matriz A es regular para cualquier valor real de x**.

b) Necesitaremos obtener la inversa de la matriz A para $x=\pi$. En este caso, dado que $sen\ \pi=0$ y $\cos\pi=-1$ la matriz A será:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos primeramente la matriz de adjuntos:

$$Adj_{11}(A)=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \qquad Adj_{12}(A)=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2 \qquad Adj_{13}(A)=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$Adj_{21}(A)=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2 \qquad Adj_{22}(A)=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \qquad Adj_{23}(A)=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$Adj_{31}(A)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad Adj_{32}(A)=-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad Adj_{33}(A)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

Así pues:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{Adj^{T}(A)}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 3: Calcula el área del recinto delimitado por $f(x)=x\cdot e^{-x}$, el eje de abscisas y la recta vertical que pasa por su máximo absoluto.

Primeramente debemos realizar una representación gráfica de la función. Para ello seguiremos los pasos básicos y más trascendentales para poder trazar un esbozo de la misma. La función puede expresarse $f(x)=x\cdot e^{-x}$ como $f(x)=\frac{x}{e^x}$. Así pues:

1. **DOMINIO**: Dado que el denominador de la función nunca se anula

$$e^x=0 \quad \Rightarrow \quad No\ tiene\ solución$$

el dominio de $f(x)$ es todo el conjunto de los números reales.

2. **CONTINUIDAD**: La función $f(x)$ es continua por ser el cociente de dos funciones continuas siendo la que actúa como denominador una función positiva que no se anula nunca.

3. **SIMETRÍAS**: En este caso, la función no presenta ningún tipo de simetría ya que:

$$f(-x)=-\frac{x}{e^{-x}}\neq f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)\ no\ tiene\ simetría\ par$$

$$f(-x)=-\frac{x}{e^{-x}}\neq -f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)\ no\ tiene\ simetría\ impar$$

4. **CORTES CON LOS EJES COORDENADOS**:

Corte con el eje OY: $x=0 \quad \Rightarrow \quad f(0)=\frac{0}{e^0}=\frac{0}{1}=0 \quad \Rightarrow \quad O\left(0,0\right)$

Corte con el eje OX: $f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{e^x}=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad O\left(0,0\right)$

Así pues, el único punto donde la función corta a los ejes coordenados es en el origen de coordenadas $O\left(0,0\right)$.

5. **ASÍNTOTAS**:

5.1. **Asíntotas verticales**: Se buscan y estudian en aquellos puntos problemáticos respecto al dominio. Dado que en este caso el dominio de es todo el conjunto de los números reales, concluimos que no tiene asíntotas verticales.

5.2. **Asíntotas horizontales**: Para saber si una función tiene asíntotas horizontales ha de estudiarse su comportamiento en el infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \ INDETERMINACIÓN \right] = \left[\begin{matrix} Aplicando \\ L'Hôpital... \end{matrix} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{-\infty}{0} \right] = -\infty$$

En este caso sólo tenemos una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to +\infty$. Cuando $x \to -\infty$ no hay asíntota horizontal.

5.3. **Asíntotas oblicuas**: Sabemos que si una función tiene asíntota horizontal entonces no presentará asíntota oblicua. En este caso, cuando $x \to +\infty$ la función presenta una asíntota horizontal y por tanto sabemos que no habrá oblicua. Sin embargo, cuando $x \to -\infty$ no hay asíntota horizontal y por tanto cabe la posibilidad de que exista oblicua. Averigüémoslo:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

Dado que la pendiente de la asíntota oblicua no es finita, podemos asegurar que la función propuesta no posee asíntotas oblicuas.

6. **PERIODICIDAD**: La función propuesta no tiene ningún tipo de periodicidad.

7. **MONOTONÍA**: Realicemos el estudio de la primera derivada:

$$f(x)=\frac{x}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{e^x - x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x\cdot(1-x)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{1-x}{e^x}$$

Igualamos la derivada a cero para obtener los puntos críticos:

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-x}{e^x}=0 \quad \Rightarrow \quad 1-x=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

Analizaremos ahora la monotonía de la función:

	$-\infty$ 1	1 $+\infty$
Signo de f'(x)	+	-
Monotonía de f(x)	$\nearrow$	$\searrow$

Así pues, la función presenta un máximo absoluto en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$. Es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

8. **CURVATURA**: Realicemos el estudio de la segunda derivada:

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f''(x)=\frac{-e^x - e^x\cdot(1-x)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{-e^x\cdot(2-x)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{x-2}{e^x}$$

Igualamos la segunda derivada a cero para obtener los posibles puntos de inflexión:

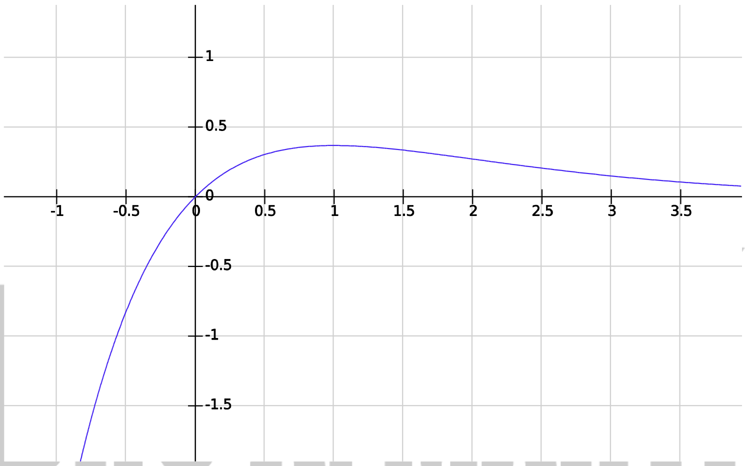
$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{e^x}=0 \quad \Rightarrow \quad x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

Analizaremos ahora la monotonía de la función:

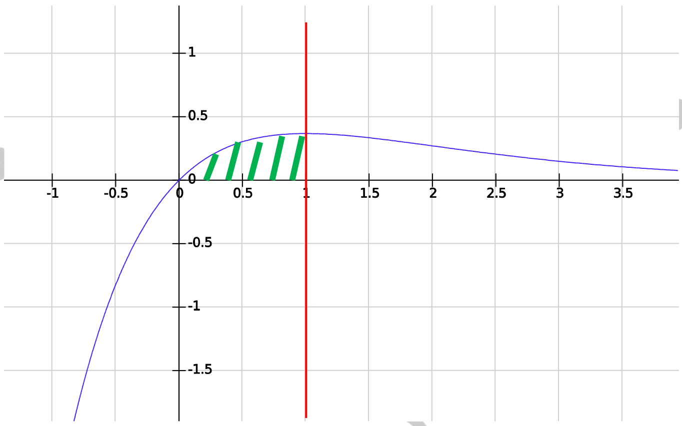
	$-\infty$ 2	2 $+\infty$
Signo de f''(x)	-	+
Curvatura de f(x)	$\cap$	$\cup$

Así pues, la función presenta un punto de inflexión en $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$. Es cóncava en el intervalo $(-\infty, 2)$ y convexa en el intervalo $(2, +\infty)$.

Con toda esta información, se tiene que la representación gráfica de la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$ propuesta es la que se muestra a continuación:



A partir de aquí, ya podemos comprobar que el área que nos piden calcular es:



Para ello, calcularemos la integral definida $A = \int_0^1 x \cdot e^{-x} \, dx$

Obtendremos primeramente la primitiva de la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$:

$$\int x \cdot e^{-x} \, dx = \begin{bmatrix} u = x & \Rightarrow & du = 1 \\ dv = e^{-x} \, dx & \Rightarrow & v = \int e^{-x} \, dx = -\int -e^{-x} \, dx = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -x \cdot e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x} \cdot (x+1) + C \quad C \in R$$

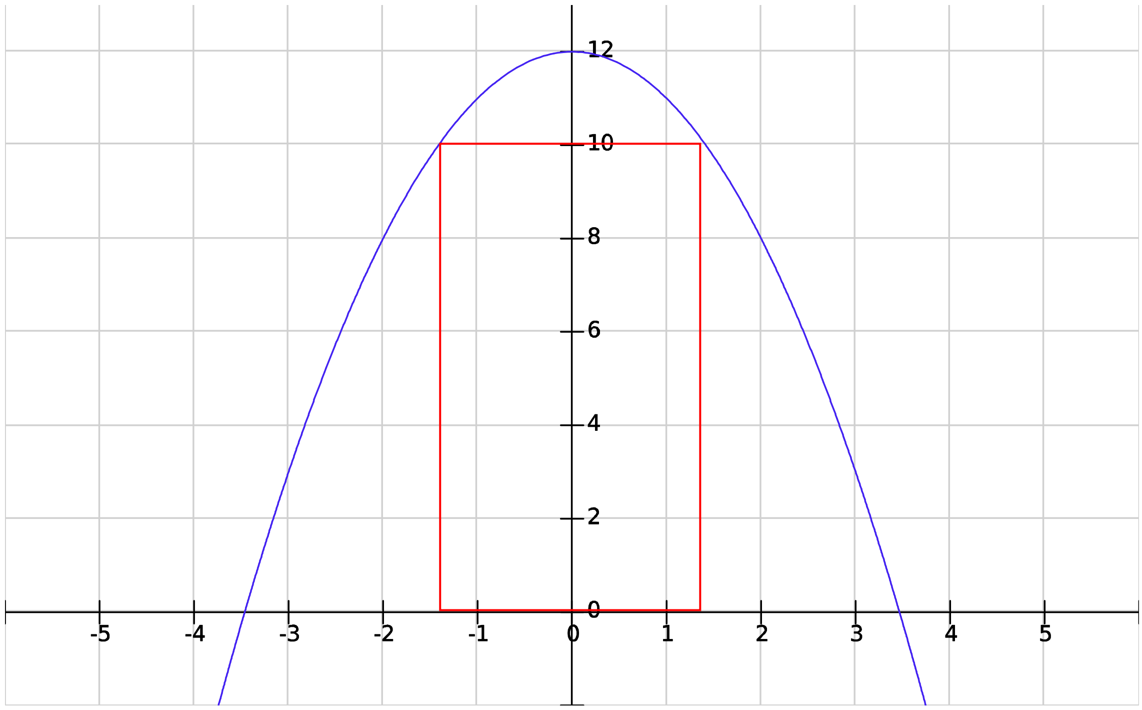
Así pues, el área que piden será:

$$A = \int_0^1 x \cdot e^{-x}\,dx = -e^{-x} \cdot (x+1)\Big]_0^1 = [Aplicando\ la\ Regla\ de\ Barrow...] =$$

$$= \left[-e^{-1} \cdot (1+1)\right] - \left[-e^{0} \cdot (0+1)\right] = -\frac{2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e} \quad u^2$$

PROBLEMA 4: Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima dos de cuyos vértices se apoyan sobre la curva parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$, y los otros dos vértices están situados sobre el eje de abscisas.

En primer lugar realizaremos una representación gráfica de la parábola y del rectángulo genérico cuya área deseamos maximizar:



A continuación deberemos construir nuestra función objetivo. Dado que deseamos maximizar el área del rectángulo inscrito, la función que debemos construir es la que proporciona el área de dicho rectángulo.

Para ello, definimos las variables:

$$x \equiv \textit{coordenada positiva del vértice inferior derecho del rectángulo.}$$

$$y \equiv \textit{altura del rectángulo.}$$

Así pues, nuestra función objetivo será:

$$A(x, y) = 2x \cdot y$$

Debemos ahora buscar una condición de ligadura entre las dos variables para poder expresar la función objetivo mediante una sola de ellas. En este caso, la relación de ligadura viene dada por la ecuación de la parábola $y = 12 - x^2$

Así pues:

$$A(x, y) = 2x \cdot y \quad \Rightarrow \quad A(x) = 2x \cdot (12 - x^2) = 24x - 2x^3$$

Esto nos permite ahora derivar la función y extraer los máximos y mínimos de la función si los hubiere:

$$A(x) = 24x - 2x^3 \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 24 - 6x^2 \quad \Rightarrow \quad 24 - 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

Dado que por definición $x \geq 0$, la solución negativa no resulta de interés para nuestro propósito:

	0 — 2	2 — $\sqrt{12}$
Signo de A'(x)	+	-
Monotonía de A(x)	$\nearrow$	$\searrow$

Así pues, las dimensiones del rectángulo de área máxima pedido serán:

$$base : 2x = 2 \cdot 2 = 4\ u$$

$$altura : y = 12 - x^2 = 12 - 2^2 = 8\ u$$