SOLUCIÓN

DOSSIER SEMANAL 3

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Calcula el valor del parámetro real m para que la función f(x) sea continua en todo el conjunto de los números reales.

$$f(x)=\begin{cases} m\cdot(x+1)\cdot e^{2x} & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{(x+1)\cdot sen\, x}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

Si atendemos primeramente al dominio de la función propuesta observamos que no presenta problemas de definición. Podría haberlos para el tramo donde $x>0$ ya que la función que rige en ese intervalo es una función racional cuyo dominio excluye el cero. Sin embargo, dado que dicho valor no está contenido en el intervalo $x>0$, podemos afirmar que el $D[f(x)]=R$.

Así pues, **analicemos ahora la continuidad** de la función.

- Tramo I: Aquí la función adopta la forma $f(x)=m\cdot(x+1)\cdot e^{2x}$ que es una composición de funciones continuas en R (polinomios y exponencial). En consecuencia y particularmente, será continua en el intervalo $x<0$.
- Tramo II: Aquí la función adopta la forma $f(x)=\dfrac{(x+1)\cdot sen\, x}{x}$ que es una función continua en todos los puntos menos en $x=0$. En particular será continua en $x<0$.

Así pues, el único punto crítico donde puede fallar la continuidad es en $x=0$. Analicémoslo:

- Para $x=0$:

$$f(0)=m\cdot(0+1)\cdot e^{0}=m$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(x+1)\cdot sen\, x}{x}=\left[\frac{0}{0}\Rightarrow INDET.\right]=\left[\begin{matrix}Utilizando\ infinitésimos\ equivalentes\\ sen\, x\approx_0 x\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{(x+1)\cdot x}{x}=\lim_{x\to 0+}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0-} m\cdot(x+1)\cdot e^{2x}=m\cdot(0+1)\cdot e^{0}=m$$

Para que la función propuesta sea continua en todo R, deberá suceder que:

$$f(0) = \underset{x \to 0+}{Lim}\ f(x) = \underset{x \to 0-}{Lim}\ f(x)$$

$$m = 1$$

Por tanto, para que la función $f(x)$ sea continua en todo el conjunto de los números reales deberá ocurrir que $m = 1$.

PROBLEMA 2: Calcula el valor del siguiente límite:

$$\underset{x \to 1}{Lim} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Para calcular este límite primeramente hemos de observar si existe la función en un entorno de $x = 1$. Dado que en la función $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$ aparece una raíz cuadrada, ésta sólo tendrá sentido cuando el radicando sea mayor o igual que cero, es decir:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

Por tanto, el dominio de la función es $\left[1, +\infty\right]$. Ello implica que **para valores menores que $x = 1$ no existe función** y por lo tanto no podremos calcular el límite por la izquierda de dicha función cuando $x \to 1$.

$$\underset{x \to 1-}{Lim} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} = \nexists$$

No ocurre lo mismo por la derecha:

$$\underset{x \to 1+}{Lim} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} = \underset{x \to 1+}{Lim} \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \underset{x \to 1+}{Lim}\ (x-1)^{\frac{1}{6}} = \underset{x \to 1+}{Lim} \sqrt[6]{x-1} = 0$$

Así pues, como conclusión, dado que los límites laterales no coinciden diremos que no existe el límite $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$ propuesto.

PROBLEMA 3: Se considera la función $f(x)$ de la cual se sabe que es continua en el intervalo cerrado $[-2,5]$ y además verifica que $f(-2)=3$ y $f(5)=-1$. Determina, en este caso, si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente tu respuesta:

a) La función $f(x)$ se anula en un único punto del intervalo $(-2,5)$

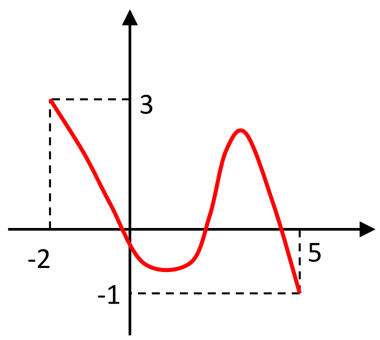
b) La función $f(x)$ adopta en algún momento el valor 1.

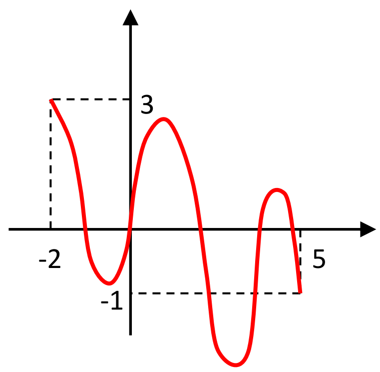
c) La ecuación $f(x)=0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $(-2,5)$

d) La función $f(x)$ está acotada en el intervalo $[-2,5]$

e) La función inversa $1/f(x)$ es una función continua

a) **FALSO**.
Dado que la función es continua en el intervalo cerrado $[-2,5]$ y verifica que $f(-2)\cdot f(5)=3\cdot(-1)=-3<0$, podemos concluir por el **Teorema de Bolzano** que existe **al menos** un punto c en el intervalo abierto $(-2,5)$ donde se anula la función, pero ello no implica que deba de ser único pues podría anularse en más de un punto. Véanse los siguientes ejemplos gráficos:





b) **VERDADERO**.
Dado que la función es continua en el intervalo cerrado $\left[-2,5\right]$, sabemos por el **Teorema de Darboux** que tomará todos los valores comprendidos entre $f(5)=-1$ y $f(-2)=3$, es decir, todos los valores del intervalo $\left[-1,3\right]$. Por tanto, en algún momento tomará (al menos una vez) el valor 1.

c) **VERDADERO**.
Dado que la función es continua en el intervalo cerrado $\left[-2,5\right]$ y verifica que $f(-2)\cdot f(5)=3\cdot(-1)=-3<0$, podemos concluir por el **Teorema de Bolzano** que:

$$\exists c\in\left(-2,5\right)\Big|\ f(x)=0$$

d) **VERDADERO**.
Dado que la función es continua en el intervalo cerrado $\left[-2,5\right]$, sabemos por el **Teorema de Weierstrass** que la función $f(x)$ alcanza su máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo y en consecuencia estará acotada en dicho intervalo.

e) **FALSO**.
Ya hemos comprobado en el apartado a) de este ejercicio que al menos existe un punto donde la función $f(x)$ se anula. Así pues, la función $1/f(x)$ no estará definida en dichos puntos donde $f(x)=0$ y en consecuencia no será continua.