SOLUCIONES

DOSSIER SEMANAL 5

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera la función $f(x)=3x^2-5x+1$. Se pide:

a) Calcula la ecuación de la recta tangente y normal a la función $f(x)$ que pasa por el punto de abscisa $x=0$.
b) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ que forma un ángulo de 45º con la horizontal.
c) Calcula el área del triángulo delimitado por las tres rectas anteriores.

a) Calculemos primeramente la ecuación de la recta tangente. Necesitaremos la pendiente de la recta que vendrá dada por el valor de la derivada en el punto solicitado.

$$f(x)=3x^2-5x+1 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=6x-5 \quad \Rightarrow \quad m=f'(0)=6\cdot 0-5=-5$$

Así pues, dado que $f(0)=3\cdot 0^2-5\cdot 0+1=1$, la ecuación de la recta tangente a en el punto de abscisa $x=0$ será:

$$y-f(x_0)=m\cdot\left(x-x_0\right) \quad \Rightarrow \quad y-1=-5\cdot\left(x-0\right) \quad \Rightarrow \quad y=-5x+1$$

Y la de la recta normal:

$$y-f(x_0)=\frac{-1}{m}\cdot\left(x-x_0\right) \quad \Rightarrow \quad y-1=\frac{1}{5}\cdot\left(x-0\right) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{x}{5}+1$$

b) Sabemos que la pendiente de una recta también viene dada por la tangente del ángulo que ésta forma con el eje de abscisas. Así pues, para la recta tangente que nos piden:

$$m=tg\left(45^{\circ}\right)=1$$

Esto nos permitirá saber cuál es el punto de tangencia de la curva y la recta tangente, para ello igualamos la derivada al valor de la pendiente calculado previamente:

$$m=f'(a) \quad \Rightarrow \quad 1=6x-5 \quad \Rightarrow \quad 6x=6 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

Así pues, dado que $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1 = -1$, la recta tangente que nos piden será:

$$y - f(x_0) = m \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y + 1 = 1 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = x - 2$$

c) Calculemos ahora el área del triángulo formado por las tres rectas calculadas en los apartados anteriores que llamaremos como sigue:

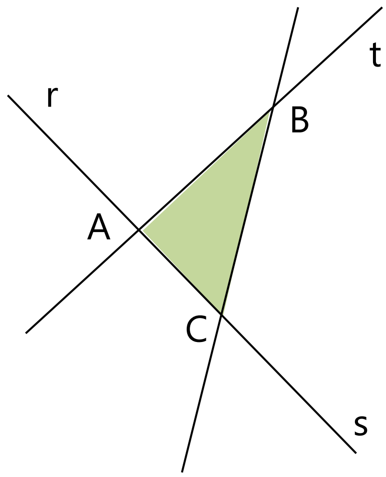
$$\begin{aligned} &r \equiv y = -5x + 1 \\ &s \equiv y = \frac{x}{5} + 1 \\ &t \equiv y = x - 2 \end{aligned}$$

Primeramente necesitaremos obtener el valor de los puntos de corte entre las tres rectas. Para ello habrá que resolver cada posible sistema de dos rectas. Obsérvese que el punto de corte entre las rectas r y s es $A(0,1)$ (pues es el punto de tangencia a partir del cual se han obtenido las ecuaciones) y por tanto podremos ahorrarnos este cálculo.

Punto de corte entre r y t:

$$\left. \begin{aligned} &r \equiv y = -5x + 1 \\ &t \equiv y = x - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad -5x + 1 = x - 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$



Punto de corte entre s y t:

$$\left. \begin{aligned} &s \equiv y = \frac{x}{5} + 1 \\ &t \equiv y = x - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad x - 2 = \frac{x}{5} + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{7}{4} \quad \Rightarrow \quad C\left(\frac{15}{4}, \frac{7}{4}\right)$$

Considerando como base y altura los catetos del triángulo rectángulo que forman las tres rectas, podemos calcular su longitud (mediante el módulo de los correspondientes vectores) y a partir de ahí, el área:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) - (0, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{15}{4}, \frac{7}{4}\right) - (0, 1) = \left(\frac{15}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \left\| \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{26}}{4}$$

Así pues, el área del triángulo será:

$$A = \frac{\left\| \overrightarrow{AC} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{AC} \right\|}{2} = \frac{\frac{\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{26}}{4}}{2} = \frac{3 \cdot 26}{16} = \frac{78}{16} = \frac{39}{8} u^2$$

PROBLEMA 2: Calcula el valor del parámetro real a para que la función sea derivable:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot Ln\, x & 0 < x \leq 1 \\ a \cdot \left(1 - e^{-x}\right) & x > 1 \end{cases}$$

Queremos que la función $f(x)$ sea derivable. Dado que toda función derivable es continua, $f(x)$ también deberá ser continua para el valor de **a** que buscamos. Así pues, calculemos primero el valor del parámetro para que $f(x)$ sea continua y luego comprobaremos si para ese valor de **a**, la función $f(x)$ es derivable.

Sabemos que:

- Para $0 < x < 1$: La función es continua y derivable por ser composición de funciones continuas y derivables en ese tramo.
- Para $x > 1$: La función es continua y derivable por ser composición de funciones continuas y derivables en dicho tramo.

Analicemos el único punto de cambio de la función definida a trozos. Comencemos, como hemos dicho con la continuidad:

- Para $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1\cdot Ln\,1=1\cdot 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} a\cdot\left(1-e^{-x}\right)=a\cdot\left(1-e^{-1}\right) \\ \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} x\cdot Ln\,x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a\cdot\left(1-e^{-1}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad a=0$$

Así pues, ahora simplemente hemos de comprobar si para $a=0$ la función $f(x)$ es derivable en $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot Ln\,x & 0<x\le 1 \\ 0 & x>1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases} 1+Ln\,x & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

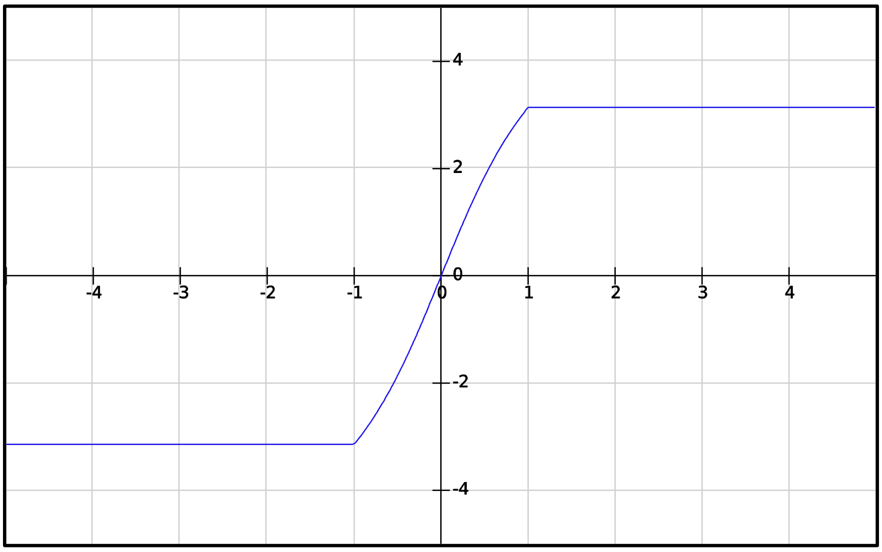
Calculando las derivadas laterales vemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1+)=0 \\ f'(1-)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(1+)\neq f'(1-) \quad \Rightarrow \quad f(x)\ no\ es\ derivable\ \ en\ x=1$$

Así pues, dado que para la función no es derivable en $x=1$, debemos concluir que en este caso, **no existe ningún valor del parámetro real a para que la función** $f(x)$ **sea derivable**.

PROBLEMA 3: Calcula la derivada de la función $f(x)=2\ arctg\ x+arcsen\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

La función propuesta es un tanto peculiar. A continuación se muestra su representación gráfica donde se pueden apreciar ciertos aspectos curiosos como que la función fuera del intervalo $-1<x<1$ es constante y además no es derivable en $x=-1$ y $x=1$ pues ahí presenta puntos angulosos.



Independientemente de esta observación gráfica, procedamos ahora a la derivación de la función dada:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2\cdot\left(1+x^2\right) - 2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}} \cdot \frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}} \cdot \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2-4x^2}}{\left(1+x^2\right)}} \cdot \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^4+2x^2-4x^2}} \cdot \frac{2\cdot\left(1-x^2\right)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^4-2x^2}} \cdot \frac{2\cdot\left(1-x^2\right)}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}} \cdot \frac{2\cdot\left(1-x^2\right)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\left|1-x^2\right|} \cdot \frac{2\cdot\left(1-x^2\right)}{1+x^2}$$

A partir de aquí tenemos dos posibles soluciones (como consecuencia del valor absoluto) dependiendo del valor de x:

- Para $-1 < x < 1$:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{2 \cdot \left(1-x^2\right)}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{4}{1+x^2}$$

- Para $x < -1$ o $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{-\left(1-x^2\right)} \cdot \frac{2 \cdot \left(1-x^2\right)}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

Para los valores de $x = -1$ y $x = 1$ la función no es derivable. En definitiva, la derivada de la función propuesta es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{1+x^2} & -1 < x < 1 \\ 0 & x < -1 \;\; o \;\; x > 1 \end{cases}$$