Página 63

Determinantes de orden 2

a) $x = 4,\ y = 7$

b) $x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda,\ y = \lambda$

c) $x = 5,\ y = -3$

d) *Sistema incompatible*

e) $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda,\ y = \lambda$

f) $x = \frac{1\,402}{109},\ y = \frac{886}{109}$

Página 64

1 a) Falso, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) Verdadero, porque en los dos sumandos del determinante aparece algún elemento de la segunda fila.

c) Verdadero, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \to |A| = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$

d) Verdadero.

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(-15) = 15$$

e) Verdadero.

$$\begin{vmatrix} m & 30 \\ n & 70 \end{vmatrix} = 70m - 30n = 10(7m - 3n) =$$

$$= 10\begin{vmatrix} m & 3 \\ n & 7 \end{vmatrix} = 10 \cdot 43 = 430$$

2 a) 2

b) –50

c) 0 $\to$ tiene una columna de ceros.

d) 0 $\to$ tiene sus dos filas iguales.

e) 0 $\to$ sus filas son proporcionales: (1.ª) · 7 = (2.ª)

f) 0 $\to$ sus dos columnas son proporcionales: (2.ª) · (–20) = (1.ª)

3 a) 13 b) –91 c) –117 d) 195

Página 65

1 a) –114 b) 3

2 a) 14 b) 1 000

Página 67

3 a) Verdadero por la propiedad 9 de los determinantes.

b) Verdadero por la propiedad 9 de los determinantes.

c) Falso, porque el producto de dos líneas no es una combinación lineal de ellas.

4 a) Tiene una fila de ceros (propiedad 2).

b) La 3.ª fila es proporcional a la 1.ª.

c) La 3.ª fila es combinación lineal de las dos primeras.

5 a) 3 b) 1 c) 1

Página 69

1 a) Falso. b) Verdadero. c) Falso. d) Verdadero.

2 a) 120 sumandos. b) Le corresponde el signo –.

3 a) 0 b) 0 c) –96 d) –1 e) 0

4 Sí, porque:

— En cada producto hay un factor de cada fila y uno de cada columna.

— Están todos los posibles productos con un factor de cada fila y uno de cada columna.

— La mitad de los sumandos tienen signo +, y la otra mitad signo –.

Comprobamos que los signos corresponden a la paridad de la permutación:

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ par: signo + $\quad a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$ par: signo +

$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$ par: signo + $\quad a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$ impar: signo –

$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ impar: signo – $\quad a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$ impar: signo –

Página 70

1 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68,\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

2 $A_{12} = 2$ $\quad A_{33} = 108$ $\quad A_{43} = -16$

Página 72

1 456

2 a) 0 b) 0 c) Por la propiedad 12.

3 a) –2 030 b) 0 c) –28 d) 83

Página 73

1 a) 290 b) 0 c) –16 d) 11

Página 75

1 $ran(A) = 2;\ ran(B) = 3;\ ran(C) = 4;\ ran(D) = 3$

Página 78

1 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2 $A^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Página 79

1 Hazlo tú.

$5a^4$

2 Hazlo tú.

a) 14 b) –35

3 Hazlo tú.

$$(2-x)(4-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & -3-x & 0 \\ x^2 & x+2 & 9-x^2 & 2 \\ x^3 & x^2+2x+4 & 27-x^3 & 2x+12 \end{vmatrix} = 0$$

Esta ecuación tiene al menos dos soluciones, por tanto tiene tres soluciones.

Página 80

4 Hazlo tú.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

5 Hazlo tú.

a) • Si $k \neq 2 \rightarrow ran(M) = 3$

• Si $k = 2$ $ran(M) = 1$

b) • Si $k \neq 10 \rightarrow ran(M) = 4$

• Si $k = 10 \rightarrow ran(M) = 3$

Página 81

6 Hazlo tú.

a) Falsa. b) Verdadera. c) Falsa.

7 Hazlo tú.

a) A es regular para $a \neq 3$ y $a \neq 1$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Página 82

1 a) 7 b) –21 c) 28

2 • Si $a = 0 \rightarrow x = 0$

• Si $a > 0 \rightarrow x = -\sqrt{a}$, $x = \sqrt{a}$

• Si $a < 0 \rightarrow x = -\sqrt{-3a}$, $x = \sqrt{-3a}$

3 $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$

4 Si $a \neq -1 \rightarrow ran(B) = 3$

Si $b \neq -2 \rightarrow ran(B) = 3$

Si $a = -1$ y $b = 3 \rightarrow ran(B) = 2$

5 a) Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \rightarrow A$ tiene inversa.

b) $X = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Página 83

1 a) $a = 1$

b) $a = 1$, $a = -3$

c) $a = \sqrt{3}$, $a = -\sqrt{3}$

d) $a = -3$, $a = 0$, $a = 2$

2 a) –24 b) 0

3 a) –72 b) –18 c) 0 d) 938

4 a) –5 b) 5 c) –15 d) 10 e) –5 f) 0

5 a) $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

6 a) $\frac{5}{2}$ b) –5 c) 10

7 a) $6^4 = 1\,296$ b) 60 c) –12

8 a) $a = 0$, $a = 1$

b) 144

9 a) $ran(A) = 3$

b) $ran(B) = 3$

c) $ran(C) = 4$

d) $ran(D) = 2$

10 a) • Si $a = 2 \rightarrow ran(A) = 2$

• Si $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = 3$

b) • Si $a = 0 \rightarrow ran(B) = 2$

• Si $a = \frac{1}{2} \rightarrow ran(B) = 2$

• Si $a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2} \rightarrow ran(B) = 3$

c) • Si $a = 1 \rightarrow ran(C) = 2$

• Si $a = -8 \rightarrow ran(C) = 2$

• Si $a \neq 1$ y $a \neq -8 \rightarrow ran(C) = 3$

d) • Si $a = 1 \rightarrow ran(D) = 2$

• Si $a = -1 \rightarrow ran(D) = 2$

• Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \rightarrow ran(D) = 3$

Página 84

11 Si $m = 0$ o $m = 1$, entonces $ran(A) < 3$.

12 a) • Si $a = 2 \rightarrow ran(A) = 3$

• Si $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = 4$

b) • Si $a = 4 \rightarrow ran(B) = 1$

• Si $a \neq 4 \rightarrow ran(B) = 2$

c) • Si $a = 1 \rightarrow ran(C) = 1$

• Si $a \neq 1 \rightarrow ran(C) = 2$

d) • Si $a = 0 \rightarrow ran(D) = 1$

• Si $a \neq 0 \rightarrow ran(D) = 2$

13 a) $ran(M) = 2$, para cualquier t.

b) Si $t \neq 2$ y $t \neq -6 \rightarrow ran(M) = 3$

Si $t = 2 \rightarrow ran(M) = 2$

Si $t = -6 \rightarrow ran(M) = 2$

c) $ran(M) = 3$, para cualquier t.

14 a) • Si $a \neq 1 \rightarrow ran(A) = 3$

• Si $a = 1 \rightarrow ran(A) = 2$

b) • Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \rightarrow ran(B) = 3$

• Si $a = 1 \rightarrow ran(B) = 2$

• Si $a = -1 \rightarrow ran(B) = 2$

c) • Si $a \neq 1 \rightarrow ran(C) = 3$

• Si $a = 1 \rightarrow ran(C) = 2$

d) • Si $a \neq -2 \rightarrow ran(D) = 3$

• Si $a = 1 \rightarrow ran(D) = 2$

15 a) $M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 5/6 & 1/2 \end{pmatrix}$

16 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -7/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

17 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

18 a) A posee inversa si $x \neq 3$ y $x \neq 1$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $x \neq 3$ y $x \neq 1$: $b = \sqrt[3]{\dfrac{1}{-x^2 + 4x - 3}}$

19 a) $A(2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A(2I - A) = I \rightarrow A$ y $2I - A$ tienen inversa y cada una es la inversa de la otra.

c) $k = 2$

20 a) A no es invertible para $t = 2$ ni para $t = -6$.

Para $t = 1$: $A^{-1} = \dfrac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

b) B no es invertible para $t = 1$ ni para $t = -1$.

Para $t = 2$: $B^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

21 $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

22 $X = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

23 $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

24 $X = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$

25 $X = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Página 85

26 a) Existe A^{-1} si $m \neq 0$. b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

27 a) Existe $(AB)^{-1}$ si $k \neq -\frac{2}{3}$ b) $X = \begin{pmatrix} -3/2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$

28 a) $x = 1,\ x = -1$ b) $x = b,\ x = c$

c) $x = 0,\ x = -2$ d) $x = 1,\ x = -1$

29 a) • Si $k = 0 \rightarrow ran(A) = 3$

• Si $k \neq 0 \rightarrow ran(A) = 4$

b) $ran(B) = 3$ para cualquier valor de k.

c) • Si $k = -1 \rightarrow ran(C) = 2$

• Si $k \neq -1 \rightarrow ran(C) = 3$

d) • Si $a = -2 \rightarrow ran(D) = 2$

• Si $a \neq -2 \rightarrow ran(D) = 3$

30 a) • Si $t = 2 \rightarrow ran(A) = 2$

• Si $t \neq 2 \rightarrow ran(A) = 3$

b) • Si $t = 0 \rightarrow ran(B) = 2$

• Si $t = 1 \rightarrow ran(B) = 2$

• Si $t = 2 \rightarrow ran(B) = 2$

• Si $t \neq 0,\ t \neq 1$ y $t \neq 2 \rightarrow ran(B) = 3$

c) • Si $t = 2 \rightarrow ran(C) = 2$

• Si $t \neq 2 \rightarrow ran(C) = 3$

31 a) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 - 2ab + b^2 & ab & b^2 \\ 2a - 2(a+b) + 2b & a+b & 2b \\ 1 - 2 + 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} a^2 - 2ab + b^2 & ab & b^2 - ab \\ 0 & a+b & 2b - (a+b) \\ 0 & 1 & 1 - 1 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab - b^2 & b^2 \\ 0 & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 - 1 & a \\ 1 & 2a^2 - 2 & 2a - 1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2 - 1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a - 1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} =$

$= (a^2 - 1)(a - 1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} =$

$= (a^2 - 1)(a - 1)(a + 1) = (a^2 - 1)^2$

32 a) $x = -1,\ x = 2$

b) Si $x = -1 \rightarrow ran(A) = 1$

Si $x = 2 \rightarrow ran(A) = 2$

Si $x \neq -1$ y $x \neq 2 \rightarrow ran(A) = 3$

33 $|A_2| = 10$ $|A_3| = 100$ $|A_5| = 10\,000$

34 a) Existe A^{-1} si $a \neq 0$. b) $\begin{pmatrix} 1 & (-a^2 - 1)/a & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{pmatrix}$

35 a) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow A^n$ tiene inversa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

36 $A_1 = 4a + 1$ $A_2 = a(a - 2)^3$

37 a) Las dos últimas filas son proporcionales.

b) Sacamos factor común $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ y $\frac{1}{z}$ en la 1.ª, 2.ª y 3.ª columnas.

La 1.ª y 3.ª filas son proporcinales.

Página 86

38 a) Hay dos columnas en la matriz A que son linealmente independientes.

b) $ran(A) = 2$.

39 • Si $a = b = c \rightarrow ran(M) = 1$

• En otro caso $\rightarrow ran(M) = 2$

40 $ran(A) = 3$

41 a) I) Verdadero:

$|c_2\ \ 2c_3\ \ c_1| = 2|c_2\ \ c_3\ \ c_1| = (-1)^2\, 2|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 10$

II) Falso:

$|c_1 + c_2\ \ c_2 - c_1\ \ c_3| = |c_1 + c_2\ \ 2c_2\ \ c_3| =$

$= 2|c_1 + c_2\ \ c_2\ \ c_3| = 2|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 10$

III) Falso:

$|c_1 + c_3\ \ c_2\ \ c_3 + c_1| = |c_1 + c_3\ \ c_2\ \ 0| = 0$

IV) Verdadero:

$|-c_2\ \ 2c_1 - c_3\ \ c_3 + c_2| = |-c_2\ \ 2c_1 - c_3\ \ c_3| =$

$= |-c_2\ \ 2c_1\ \ c_3| = 2|-c_2\ \ c_1\ \ c_3| =$

$= -2|c_2\ \ c_1\ \ c_3| = (-1)(-2)|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 10$

b) I) Falso: $|5B| = 5^3|B| = 5^3 \cdot 4 = 500$

II) Verdadero: $|B^2| = |B \cdot B| = |B||B| = 16$

III) Verdadero:

$$|B \cdot B^{-1}| = |B||B^{-1}| = 1 \rightarrow |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{4}$$

c) Falso:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$$

$-x^3 + 3x + 2 = 0$

Las soluciones son: $x = -1,\ x = 2$

d) Verdadero:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/a\,(-a^2+1) & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a & 1-a^2 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Verdadero:

$A^2 = 2A - I \rightarrow A^2 - 2A = -I \rightarrow A(A - 2I) =$

$= -I \rightarrow A(2I - A) = I$

Luego A es invertible con $A^{-1} = 2I - A$.

f) Verdadero:

$AXB = A + B \rightarrow X = A^{-1}(A + B)B^{-1} =$

$= (I + A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$

42 Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Aplicando la definición de determinante, obtenemos que $|A^t| = |A|$. Lo vemos:

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$

$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

$|A^t| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$

$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Luego $|A| = |A^t|$.

43 Solo podría ser b).

44 El resultado es 0.

45 $ran(B) = 2$

46 $|A^{-1}| = \frac{1}{3}$ $\qquad |B^t \cdot A| = 6$ $\qquad |(AB^{-1})^t| = \frac{3}{2}$

47 a) El rango de una matriz es el número de filas (o de columnas) linealmente independientes.

b) I) Verdadera. II) Verdadera. III) Falsa.

IV) Falsa. V) Verdadera.

48 $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = |A| \rightarrow$

$\rightarrow |A|^2 - |A| = 0 \rightarrow |A|(|A| - 1) = 0 \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 1 \end{cases}$

49 a) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

50 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ COLUMNAS (1.ª) – (3.ª), (2.ª) – (3.ª), (3.ª) $\begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-2b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & (a-b) & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)^2(a+b-2b) = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

51 $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} bca & a^2 & a^3 \\ acb & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} =$

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

52 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) \\ a^2 & (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Página 87

53 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

54 Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

55 a) (1) $\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}\, b_{11}\, a_{21}\, b_{12} - a_{11}\, b_{12}\, a_{21}\, b_{11} =$

$= a_{11}\, a_{21}\, b_{11}\, b_{12} - a_{11}\, a_{21}\, b_{11}\, b_{12} = 0$

(4) $\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$

$a_{12}\, b_{21}\, a_{22}\, b_{22} - a_{12}\, b_{22}\, a_{22}\, b_{21} =$

$= a_{12}\, a_{22}\, b_{21}\, b_{22} - a_{12}\, a_{22}\, b_{21}\, b_{22} = 0$

b) (2) $\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}\, b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}\, b_{22}\, |A|$

(3) $\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = b_{21}\, b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} =$

$= -b_{21}\, b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -b_{21}\, b_{12}\, |A|$

Por tanto, queda:

$|AB| = 0 + b_{11}\, b_{22}\, |A| - b_{21}\, b_{12}\, |A| + 0 =$

$= |A|\,(b_{11}\, b_{22} - b_{21}\, b_{12}) = |A| \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$

56 a) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A \cdot (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$

c) $|(A_{ij})| = |A|^2$

57 $|A_{ij}| = |A|^2$

58 $|A_{ij}| = |A|^{\,n-1}$

Autoevaluación

1 A no es regular para $a = -2$.

2 $a^2(a+2)(a-2)$

3 a) $|3A(x)| = 162 \;\rightarrow\; x = 1$

b) $0 \cdot y = 0$, luego B no tiene inversa.

4 a) • Si $a = b = 0$, $ran(M) = 0$

• Si $a = b \neq 0$, $ran(M) = 1$

• Si $b = -2a \neq 0$, $ran(M) = 2$

• Si $a \neq b$ y $b \neq -2a$, $ran(M) = 3$

b) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

5 a) 5 b) 10 c) –5

6 • Si $a = 0 \;\rightarrow\; ran(N) = 1$

• Si $a = -3 \;\rightarrow\; ran(N) = 3$

• Si $a \neq 0 \;\rightarrow\; ran(N) = 3$

7 a) A tiene inversa si $t \neq -1$ y $t \neq -3$.

b) $X = \begin{pmatrix} 9/8 & -1/8 & 1/2 \\ 5/8 & 3/8 & 5/2 \\ 1/8 & -1/8 & 3/2 \end{pmatrix}$