DOSSIER SEMANAL 15

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Discute y resuelve (siempre que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los parámetros reales λ y μ:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x+y+z=\mu \\ x+y+\lambda z=2 \\ 2x+y+\lambda z=\mu \end{array}\right\}$$

Discutiremos el sistema utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema según los valores de los parámetros λ y μ.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x+y+z=\mu \\ x+y+\lambda z=2 \\ 2x+y+\lambda z=\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & \lambda & \mu \end{array}\right) = A^*$$

(con A la submatriz de las tres primeras columnas)

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real λ:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 2 - \lambda - \lambda^2 = \lambda - 1$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro λ, anulan este determinante. Es decir:

$$|A| = \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

Esto nos permite distinguir dos casos posibles:

CASO I: $\lambda \neq 1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} \lambda & 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & \lambda & \mu \end{array}\right)$	En este caso, dado que el determinante de la matriz de coeficientes no es cero, podemos asegurar que el rango de dicha matriz es 3. Así mismo, la matriz ampliada como mucho puede tener rango 3 y dado que contiene a la matriz A que es de rango 3, podemos concluir que su rango también es tres. Como conclusión, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius el sistema en este caso quedaría clasificado como **<u>SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO</u>** ya que: $R(A) = R(A^*) = 3 = NUM.INCÓGNITAS$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ \mu & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\lambda - 1} \overset{F3'=F3-F1}{=} \frac{\begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)\cdot\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)\cdot(\mu - 2)}{\lambda - 1} = \mu - 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \mu & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 2 & \mu & \lambda \end{vmatrix}}{\lambda - 1} = \frac{2\lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu - 4 - \mu\lambda^2 - \mu\lambda}{\lambda - 1} = \frac{(2 - \mu)\lambda^2 + \mu\lambda + \mu - 4}{\lambda - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \mu \end{vmatrix}}{\lambda - 1} \overset{F3'=F3-F1}{=} \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 - \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\lambda - 1} = \frac{(2 - \lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\lambda - 1} = \frac{(2 - \lambda)\cdot(2 - \mu)}{\lambda - 1}$$

Así pues, la solución del sistema será:

$$(x, y, z) = \left(\mu - 2, \frac{(2 - \mu)\lambda^2 + \mu\lambda + \mu - 4}{\lambda - 1}, \frac{(2 - \lambda)\cdot(2 - \mu)}{\lambda - 1}\right)$$

<table>
<tr><td colspan="2">CASO II: $\lambda = 1$</td></tr>
<tr><td>$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \mu \end{array}\right)$$</td><td>En este caso, sabemos que la matriz de coeficiente no es de rango 3. De hecho, dado que existe al menos un menor de orden 2 que no es nulo, podemos afirmar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Rg(A) = 2$$

Ahora bien, el rango de la matriz ampliada depende en este caso del valor del parámetro real μ, por lo que deberemos estudiar los posibles subcasos.</td></tr>
</table>

Analicemos pues todos los menores de orden 3 de la matriz ampliada para averiguar cuando el rango de ésta puede ser 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \mu \end{vmatrix} \overset{F3=F3-F1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \mu \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - \mu \quad \Rightarrow \quad 2 - \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \mu \end{vmatrix} = 0 \quad \textit{pues hay dos columnas iguales}$$

Así pues, se presentan dos subcasos:

<table>
<tr><td colspan="2">SUBCASO I: $\lambda = 1$ y $\mu \neq 2$</td></tr>
<tr><td>$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \mu \end{array}\right)$$</td><td>En este subcaso, sabemos que la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 que no es nulo y como consecuencia su rango será tres. Así pues, dado que:

$$2 = R(A) \neq R(A^*) = 3$$

por el Teorema de Rouchè-Frobënius, podemos afirmar que el sistema es INCOMPATIBLE.</td></tr>
</table>

SUBCASO II: $\lambda = 1$ **y** $\mu = 2$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$	En este subcaso, tendremos que: $R(A) = R(A^*) = 2 < n^{\text{o}}\ incógnitas$ por el Teorema de Rouchè-Frobënius, podemos afirmar que el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

Vamos a resolver este último subcaso. Utilizaremos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{F2=F2-F1 \\ F3'=F3-2F1}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{F3 \leftrightarrow F2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos en el sistema un grado de libertad. Denotando por ejemplo, $z = \alpha$ siendo α un parámetro real, tendríamos que la solución del sistema sería:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ y + z = 2 \\ z = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x = 2 - (2 - \alpha) - \alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 2 - \alpha \\ z = \alpha \end{array}\right\} \quad con\ \alpha \in R$$

Resumiendo el estudio del sistema:

CASO	TIPO DE SISTEMA	SOLUCIÓN
$\lambda \neq 1$	COMPATIBLE DETERMINADO	$\left.\begin{array}{l} x = \mu - 2 \\ y = \dfrac{(2-\mu)\lambda^2 + \mu\lambda + \mu - 4}{\lambda - 1} \\ z = \dfrac{(2-\lambda)\cdot(2-\mu)}{\lambda - 1} \end{array}\right\}$
$\lambda = 1$ y $\mu \neq 2$	INCOMPATIBLE	No tiene solución
$\lambda = 1$ y $\mu = 2$	COMPATIBLE INDETERMINADO	$\left.\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 2 - \alpha \\ z = \alpha \end{array}\right\} \quad con\ \alpha \in R$

PROBLEMA 2: Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

aplicando únicamente las propiedades de los determinantes (sin utilizar la regla de Sarrus ni el desarrollo por adjuntos).

Realizaremos combinaciones lineales entre las filas o columnas para conseguir ceros en el determinante y aplicaremos otras propiedades de los determinantes como la extracción de factor común (por filas o columnas).

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \overset{F1'=F1+F2+F3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \overset{\substack{C2'=C2-C1 \\ C3'=C3-C1}}{=} (a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} = -(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2b & a+b+c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2b & a+b+c & 0 \\ -2c & 0 & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot(a+b+c) = (a+b+c)^3$$

En el último paso, hemos hecho uso de la propiedad que nos dice que el determinante de una matriz triangular (ya sea superior o inferior) es el producto de la diagonal principal.

PROBLEMA 3: Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de debe adoptar el parámetro real m para que la matriz sea singular.

b) Para $m=-2$, calcula la matriz inversa A^{-1}

c) Determina la matriz X que verifica la ecuación

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot X$$

a) Para que la matriz sea singular (es decir, para que **no tenga inversa**), su determinante debe ser cero. Así pues:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=m^2+4m+3 \quad\Rightarrow\quad m^2+4m+3=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} m=-1 \\ m=-3 \end{matrix}$$

Por tanto, la matriz *A* será singular para $m=-1$ y $m=-3$.

b) Supongamos ahora que $m=-2$. En este caso sabemos que la matriz A es invertible y por tanto podemos calcular su inversa. Realizaremos el cálculo mediante el uso de determinantes (recordar que también podría usarse aquí el método de Gauss-Jordan). Aplicaremos la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{Adj^T(A)}{|A|}$$

En este caso propuesto, la matriz A será:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que en el apartado anterior hemos calculado que $|A| = m^2 + 4m + 3$, se tendrá que para $m = -2$ este determinante vale:

$$|A| = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Calculamos ahora la matriz de adjuntos:

$$Adj_{11}(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad Adj_{12}(A) = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad Adj_{13}(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$Adj_{21}(A) = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad Adj_{22}(A) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad Adj_{23}(A) = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$Adj_{31}(A) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \qquad Adj_{32}(A) = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \qquad Adj_{33}(A) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

Así pues:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 12 & 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{Adj^T(A)}{|A|} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 \\ 3 & -2 & -12 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

c) Intentemos obtener el valor de la matriz X despejando de la ecuación propuesta:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz que pre-multiplica a la matriz X es precisamente la matriz del apartado anterior. Dado que sabemos que tiene inversa podemos escribir que:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, dado que la inversa de la matriz ya la hemos calculado en el apartado anterior, simplemente hemos de realizar la multiplicación de matrices para obtener el resultado buscado:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 \\ 3 & -2 & -12 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} -18 & -44 & 1 \\ -28 & -66 & 4 \\ -16 & -39 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 4: Halla la primitiva de $f(x)=\dfrac{5x^2-5x-3}{x^3-3x+2}$ que pasa por el punto $(2,0)$.

Calculemos primeramente las primitivas de la función $f(x)$:

$$F(x)=\int \frac{5x^2-5x-3}{x^3-3x+2}\,dx$$

La integral es de tipo racional con el grado del denominador mayor que el del denominador. Tras la factorización del denominador, observamos que tiene una raíz simple y otra múltiple:

$$\int \frac{5x^2-5x-3}{x^3-3x+2}\,dx=\int \frac{5x^2-5x-3}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\,dx$$

Así pues descompondremos la función racional como suma de tres funciones racionales más simples:

$$\frac{5x^2-5x-3}{(x-1)^2\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x+2)}$$

Así pues:

$$5x^2-5x-3=A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)^2$$

$$x=1 \quad\Rightarrow\quad -3=3B \quad\Rightarrow\quad B=-1$$

$$x=-2 \quad\Rightarrow\quad 27=9C \quad\Rightarrow\quad C=3$$

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad -3=-2A+2B+C \quad\Rightarrow\quad A=2$$

Esto permite escribir:

$$\frac{5x^2-5x-3}{(x-1)^2\cdot(x+2)}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x+2}$$

Y por tanto:

$$\int \frac{5x^2-5x-3}{x^3-3x+2}\,dx = \int \frac{5x^2-5x-3}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\,dx = \int \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+2}\,dx =$$

$$= 2\cdot Ln\,|\,x-1\,| + (x-1)^{-1} + 3\cdot Ln\,|\,x+2\,| + C =$$

$$= 2\cdot Ln\,|\,x-1\,| + \frac{1}{x-1} + 3\cdot Ln\,|\,x+2\,| + C \quad con \quad C \in R$$

De todas estas primitivas, queremos aquella que pasa por el punto $(2,0)$. Es decir, aquella que verifica que:

$$F(2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot Ln\,|\,2-1\,| + \frac{1}{2-1} + 3\cdot Ln\,|\,2+2\,| + C = 0$$

$$2\cdot Ln\,|1| + \frac{1}{1} + 3\cdot Ln\,|\,4\,| + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1-3\cdot Ln4$$

Por tanto, **la primitiva de $f(x)$ que buscamos es:**

$$F(x) = 2\cdot Ln\,|\,x-1\,| + \frac{1}{x-1} + 3\cdot Ln\,|\,x+2\,| - 1 - 3\cdot Ln4$$