BLOQUE I
ÁLGEBRA LINEAL

TEMA 1: MATRICES

- Concepto de matriz
- Algunos tipos de matrices
- Operaciones con matrices
- Rango de una matriz

Una matriz no es más que un conjunto de elementos dispuestos en filas y columnas. En este tema nos centraremos en las matrices cuyos elementos son números reales.

DIAGONAL PRINCIPAL

DIAGONAL SECUNDARIA

Fila 2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Columna 1

DIMENSION

Nº filas x Nº columnas

4x4

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ COLUMNA

Formada por una única columna

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRIZ FILA

Formada por una única fila

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRIZ RECTANGULAR

Matriz con diferente número de filas que de columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ CUADRADA

Matriz con el mismo número de filas que de columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ SIMÉTRICA

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

Su diagonal principal será nula

ALGUNOS TIPOS DE MATRICES

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ NULA

Matriz cuyos elementos son todos nulos

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

Cuadrada con ceros fuera de la diagonal principal

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ESCALAR

Matriz diagonal con sus elementos diagonales iguales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD

Matriz escalar con unos en la diagonal principal

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TRIANGULAR SUPERIOR

Matriz cuadrada con ceros por debajo de la diagonal principal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

TRIANGULAR INFERIOR

Matriz cuadrada con ceros por encima de la diagonal principal

SUMA Y DIFERENCIA DE MATRICES

- **¿CÚANDO SE PUEDEN SUMAR/RESTAR DOS MATRCIES?**

Podremos sumar o restar dos matrices siempre y cuando ambas matrices tengan la **misma dimensión**.

- **¿CÓMO SE SUMAN/RESTAN DOS MATRCIES?**

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}} + \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}}$$

Se operan los elementos de ambas matrices que ocupan la misma posición. El resultado es otra matriz con la misma dimensión que las anteriores.

SUMA Y DIFERENCIA DE MATRICES

- PROPIEDADES

ASOCIATIVA	$A+(B+C)=(A+B)+C$
CONMUTATIVA	$A+B=B+A$
ELEMENTO NEUTRO	$A+0=A$
ELEMENTO SIMÉTRICO	$A+(-A)=0$

PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

- **¿CÚANDO SE PUEDE MULTIPLICAR UN NÚMERO POR UNA MATRIZ?**

  Siempre puede realizarse el producto de un escalar por una matriz cualquiera.

- **¿CÓMO SE MULTIPLICA UN NÚMERO POR UNA MATRIZ?**

  Simplemente se multiplica cada elemento de la matriz por el escalar indicado.

$$4\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ -1 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

- **¿CÚANDO SE PUEDEN MULTIPLICAR DOS MATRICES?**

  Podremos multiplicar dos matrices siempre y cuando el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 4 \qquad 4 \times 3$$

SÍ

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 2 \qquad 3 \times 3$$

NO

PRODUCTO DE MATRICES

¿CÓMO SE MULTIPLICAN DOS MATRICES?

Veámoslo primero con un ejemplo. Imaginemos que queremos multiplicar las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$2\times 3 \qquad 3\times 3 \qquad 2\times 3$$

$$\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{matrix} \xrightarrow{+} -7$$

PRODUCTO DE MATRICES

- **¿CÓMO SE MULTIPLICAN DOS MATRICES?**

Y así se procede sucesivamente hasta obtener los elementos de toda la matriz resultante. RECUERDA: "Fila por columna"

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \boxed{0 \quad 3 \quad 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} 10$$

PRODUCTO DE MATRICES

Formalmente, utilizando notación matemática, el producto de dos matrices es una nueva matriz:

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

Cuyos elementos vienen dados por:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}\qquad \forall i=1\ldots m\quad \forall j=1\ldots p$$

PRODUCTO DE MATRICES

PROPIEDADES

PROPIEDAD 1: Una de las propiedades más importantes a recordar es que el producto de matrices **NO ES CONMUTATIVO**. Es decir:

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

PROPIEDAD 2: El producto de matrices es asociativo.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

PROPIEDAD 3: Si A es una matriz cuadrada de orden **n** y la matriz *I* representa la matriz identidad del mismo orden, se tiene que:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

PRODUCTO DE MATRICES

PROPIEDAD 4: El producto de matrices es distributivo respecto de la suma:

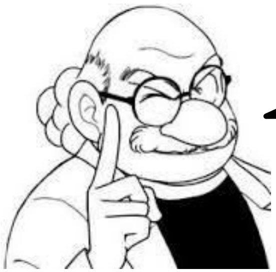
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

PORQUE RECUERDA QUE:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

PRODUCTO DE MATRICES

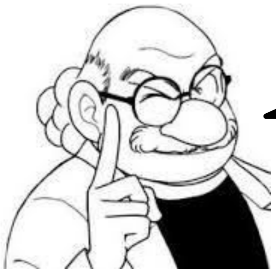


- Si $A \cdot B = 0$ no implica que $A = 0$ o $B = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $A \cdot B = A \cdot C$ no implica que $B = C$

PRODUCTO DE MATRICES



PARA NO EQUIVOCARSE

- Ten en cuenta que:

$$(A+B)^2 = A^2 + A\cdot B + B\cdot A + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - A\cdot B - B\cdot A + B^2$$

$$(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - A\cdot B + B\cdot A - B^2$$

TRASPOSICIÓN DE MATRICES

- **¿CUÁNDO SE PUEDE TRASPONER UNA MATRIZ?**

  Siempre es posible calcular la matriz traspuesta a otra dada.

- **¿CÓMO SE CALCULA LA TRASPUESTA DE UNA MATRIZ?**

  La matriz traspuesta de otra es una nueva matriz donde se han intercambiado filas por columnas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \\ 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

TRASPOSICIÓN DE MATRICES

PROPIEDADES

- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$ con $k \in R$

ALGUNAS DEFINICIONES

Una matriz cuadrada A se dice que es **simétrica** si:

$$A = A^T$$

Una matriz cuadrada A se dice que es **antisimétrica** si:

$$A = -A^T$$

COMBINACIONES LINEALES

¿QUÉ ES UNA COMBINACIÓN LINEAL?

Una fila/columna se dice que es **combinación lineal** de otras filas/columnas si puede obtenerse tras sumar dichas filas/columnas multiplicadas cada una por algún número.

¿Observas alguna combinación lineal en las filas o columnas de esta matriz?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

COMBINACIONES LINEALES

¿Observas alguna combinación lineal en filas o columnas?

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Decimos que la segunda columna **depende linealmente** de la primera y tercera columna.

COMBINACIONES LINEALES

¿Observas alguna combinación lineal en filas o columnas?

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 12 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 4 & 12 & -4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Decimos que la tercera fila **depende linealmente** de la primera y que la primera fila **depende linealmente** de la segunda.

RANGO DE UNA MATRIZ

- **¿QUÉ ES EL RANGO DE UNA MATRIZ?**

El **RANGO** o **CARACTERÍSTICA** de una matriz es el número de filas/columnas que son linealmente **INDEPENDIENTES**.

RANGO DE UNA MATRIZ

¿Cuál es el rango de la siguiente matriz?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \cancel{4} \\ 1 & 2 & \cancel{3} \\ 1 & 1 & \cancel{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La tercera columna es linealmente DEPENDIENTE de la primera y la segunda. Así pues, esta columna no nos interesa para el rango y podemos dejar de contar con ella.

RANGO DE UNA MATRIZ

¿Cuál es el rango de la siguiente matriz?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \cancel{4} \\ 1 & 2 & \cancel{3} \\ 1 & 1 & \cancel{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = ? \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¿Hay ahora alguna relación lineal entre las dos columnas que quedan? Como no existe relación entre ellas, podemos decir que ambas son linealmente INDEPENDIENTES.

Dado que hay DOS columnas linealmente independientes, el rango de dicha matriz es DOS.

$$R(A) = 2$$

RANGO DE UNA MATRIZ

Veamos otro ejemplo. ¿Cuál es el rango de la siguiente matriz?

$$B=\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 5} \\ \cancel{2 \quad 4 \quad 10} \\ \cancel{1 \quad 2 \quad 5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$R(B)=1$$

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

CÁLCULO MEDIANTE EL MÉTODO DE GAUSS

Recordemos que el método de Gauss consiste en conseguir ceros por debajo de los elementos de la diagonal aplicando una serie de reglas que repasaremos a continuación. Consideremos la matriz A siguiente y calculemos su rango haciendo uso del método de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

- **REGLA 1: Se permite el intercambio (o permutación) de filas o columnas**

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Siempre es interesante tener un 1 o -1 en el primer elemento de la primera fila. Así pues, para conseguirlo, intercambiaremos las filas 1 y 2.

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

- **REGLA 2: Se permite la multiplicación y división de filas por cualquier número que no sea cero.**

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \\ \div\ 2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicaremos por -1 la primera fila (y así conseguimos el 1 que buscábamos)

Dividiremos por 2 la tercera fila para hacer más sencilla la matriz.

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

- **REGLA 3: Se permite sumar o restar a una fila otra fila multiplicada o dividida por cualquier número no nulo.**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3'=F3-3\cdot F1]{F2'=F2-2\cdot F1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 9 & 11 \\ 0 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F3''=F3'-F2'} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

Aplicando Gauss hemos transformado la matriz A en otra matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*El rango de A coincide con el número de filas que NO SON COMPLETAMENTE NULAS (**o proporcionales a otras**) en la matriz que obtenemos tras aplicar el método de Gauss.*

$$R(A) = 2$$

INVERSA DE UNA MATRIZ

Dadas dos matrices A y B (cuadradas de orden n) se dice que son **inversa** una de la otra si se verifica:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

EJEMPLO: Comprueba que las siguientes matrices son inversa una de la otra.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

INVERSA DE UNA MATRIZ

Usualmente la inversa de una matriz cuadrada A se representa por A^{-1}

Es importante tener presente que no todas las matrices cuadradas tienen inversa. **Sólo tienen inversa las matrices cuadradas de orden n que tienen rango n**. Más adelante veremos una forma rápida de saber si una matriz tiene inversa o no sin necesidad de conocer el rango.

En este tema estudiaremos dos métodos para calcular la inversa de una matriz:

- POR **DEFINICIÓN**
- POR EL **MÉTODO DE GAUSS-JORDAN**

INVERSA DE UNA MATRIZ

- **MÉTODO 1: UTILIZANDO LA DEFINICIÓN DE MATRIZ INVERSA**

Vamos a calcular la inversa de A utilizando la definición matemática de matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar una matriz del mismo orden:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

que al multiplicarla por A nos proporcione de resultado la matriz identidad:

INVERSA DE UNA MATRIZ

- **MÉTODO 1: UTILIZANDO LA DEFINICIÓN DE MATRIZ INVERSA**

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} \boxed{3x+2z} & \boxed{3y+2t} \\ \boxed{x+z} & \boxed{y+t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Lo que nos permite escribir que:

$$\begin{cases} 3x+2z=1 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y+2t=0 \\ y+t=1 \end{cases}$$

INVERSA DE UNA MATRIZ

- **MÉTODO 1: UTILIZANDO LA DEFINICIÓN DE MATRIZ INVERSA**

Resolviendo cada sistema, obtenemos que:

$$\begin{cases} 3x+2z=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=1 \quad z=-1$$

$$\begin{cases} 3y+2t=0 \\ y+t=1 \end{cases} \Rightarrow \quad y=-2 \quad t=3$$

Por tanto, la matriz inversa de A será:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

INVERSA DE UNA MATRIZ

❑ MÉTODO 2: GAUSS-JORDAN

Primeramente se disponen la matriz A y la identidad separadas mediante una línea vertical:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aplicamos las reglas del método de Gauss a esta nueva matriz doble hasta trasformar la parte izquierda en la matriz identidad.

IMPORTANTE: *Aquí* ***no se puede*** *aplicar la regla 1 de* ***intercambio de columnas***.

INVERSA DE UNA MATRIZ

MÉTODO 2: GAUSS-JORDAN

Primero hay que conseguir ceros debajo y encima de la diagonal principal.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F2'=3\cdot F2-F1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F1'=2\cdot F2-F1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Finalmente hay que transformar en unos los elementos de la diagonal principal.

$$\xrightarrow[F1'=F1/(-3)]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Una vez conseguido, en el lado derecho aparecerá la matriz inversa de A.