

PROBLEMA 1: Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) **Clasifícalas** atendiendo a la tipología estudiada en clase

b) **Calcula**, siempre que se pueda, las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{lll} \triangleright -2C + D & \triangleright C \cdot A & \triangleright [C \cdot D^t]^t \\ \triangleright (C^t - D)^2 & \triangleright B \cdot A & \triangleright C \cdot A - 2A \cdot D \end{array}$$

a) La matriz A es una matriz rectangular de dimensión 3x2. La matriz B es una matriz fila y su dimensión es 1x3. La matriz C es una matriz cuadrada de orden 3 (o dimensión 3x3) simétrica (ya que coincide con su traspuesta). La matriz D es una matriz cuadrada de orden 3, triangular superior (ya que por debajo de la diagonal principal todos los elementos son nulos)

b) Vamos ahora a calcular las operaciones con matrices propuestas en cada apartado, siempre que sea posible:

$$\triangleright -2C + D = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\triangleright C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\triangleright [C \cdot D^t]^t = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right]^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & 10 & -8 \\ -2 & -8 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 10 & -8 \\ 0 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \triangleright (C^t - D)^2 &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right]^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \right]^2 = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\triangleright B \cdot A = (1 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \ 1)$$

- $\triangleright C \cdot A - 2A \cdot D$ no puede realizarse ya que el producto $A \cdot D$ no puede efectuarse. El número de columnas de A no coincide con el número de filas de la matriz D.

PROBLEMA 2: Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Calcula A^{2019} y B^n siendo n un número natural cualquiera.

- a) Calcularemos primeramente una expresión genérica para la potencia n-sima de la matriz A. Observemos qué comportamiento inicial presentan las primeras potencias:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parece ser que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Utilizaremos el método de inducción para demostrar que ciertamente, esta expresión se corresponde con la potencia n-sima de la matriz A. Suponemos que la expresión anterior es cierta para n y vamos a verificar si se cumple para n+1:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{7} & \frac{n+1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que la expresión también se verifica para el natural n+1, podemos afirmar que la expresión propuesta es correcta para cualquier exponente natural. Así pues:

$$A^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2021}{7} & \frac{2021}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pedro A. Martínez Ortiz

b) Procedemos de forma análoga a como lo hicimos con la matriz anterior. Observamos que:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ B^2 &= B \cdot B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha & -2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \\ B^3 &= B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} \alpha & -\cos 2\alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha \cos \alpha & \cos 2\alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 3\alpha & -\operatorname{sen} 3\alpha \\ \operatorname{sen} 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así pues, se observa que:

$$B^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\operatorname{sen} n\alpha \\ \operatorname{sen} n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

IES María Blasco



PROBLEMA 3: Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) **Comprueba** si la matriz A verifica la relación $2(A - B)^2 + I = A \cdot B^t$ siendo I la matriz identidad de orden 2.
- b) ¿**Conmutan** las matrices A y B?
- c) **Determina** qué tipo de matrices conmutan con la matriz B

- a) Vamos a comprobar si la matriz A cumple la relación especificada. Observamos, primeramente, que:

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ (A - B)^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2(A - B)^2 + I &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mientras que:

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, podemos afirmar que la matriz A no cumple la relación propuesta.

- b) Se puede observar fácilmente que las matrices A y B no conmutan:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- c) Consideremos una matriz cualquiera X de dimensión 2x2 (ya que para que conmuten debe tener la misma dimensión que la matriz B):

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Queremos que se verifique que:

$$X \cdot B = B \cdot X$$



Así pues:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Realizando las multiplicaciones, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} a = a + 2c \\ 2a + b = b + 2d \\ c = c \\ 2c + d = d \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2c = 0 \\ a = d \\ c = c \\ 2c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} c = 0 \\ a = d \end{array} \right\}$$

Por tanto, las matrices que conmutan con la matriz B son de la forma:

Pedro A. Martínez Ortiz

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ siendo } a \text{ y } b \text{ números reales cualesquiera}$$

www.maths4everything.com

IES María Blasco

