PROBLEMA 1: Considera las siguientes matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Determina el **rango** y el **determinante** de cada matriz
b) ¿Cuáles de estas matrices son invertibles? **Calcula la inversa** de aquellas matrices que sean regulares.
c) **Calcula la matriz X** que verifica la ecuación: $X - B^{50} = I + XB$

a) **El rango de la matriz A claramente es 2**, ya que no existe proporcionalidad entre sus dos únicas filas (o columnas). No hay ningún tipo de dependencia lineal. En cuanto a su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-3) = -1$$

Por lo que respecta a la matriz B, podemos observar que es una matriz triangular. De forma que el rango es muy fácil de ver porque se corresponderá con el número de filas/columnas que no son completamente nulas. En este caso, **el rango de B es 2**. En cuanto a su determinante, dado que es una matriz triangular, puede obtenerse multiplicando únicamente los elementos de su diagonal principal, en este caso:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Finalmente, la matriz C (que también es triangular superior) **tiene rango 3** y su determinante valdrá:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

b) De las matrices propuestas, la única matriz que no posee inversa es la matriz B ya que su determinante es cero (o lo que es equivalente, su rango no coincide con el número de filas/columnas que posee). Calculemos las inversas de las matrices regulares A y C (que poseen inversa ya que su determinante no es cero).

Calcularemos la inversa de A mediante la definición de matriz inversa:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ -x-2z & -y-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3z&=1 \\ -x-2z&=0 \\ 2y+3t&=0 \\ -y-2t&=1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x&=1 \\ y&=0 \\ z&=0 \\ t&=1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

En este caso, como podemos ver, la inversa de A coincide con ella misma.

Calculemos ahora la inversa de C mediante el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F1'=F1+4F3]{F2'=F2+2F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F1'=F1+2F2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto, la inversa de la matriz C es:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Primeramente, aislaremos la matriz X en un solo miembro de la ecuación:

$$X - B^{50} = I + XB$$

$$X - XB = I + B^{50}$$

$$X(I-B) = I + B^{50}$$

Si existiera la matriz inversa de (I-B) podremos post-multiplicar ambos miembros de la ecuación por la inversa de dicha matriz:

$$X(I-B)(I-B)^{-1} = (I+B^{50})\,(I-B)^{-1}$$

$$X = (I+B^{50})\,(I-B)^{-1}$$

Vamos a comprobar que efectivamente existe la inversa de la matriz I-B:

$$I-B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=C$$

Como podemos observar, I-B coincide con la matriz C del ejercicio. Ya hemos comprobado en el apartado anterior que es invertible y además hemos calculado su inversa. Así pues, sí que podremos calcular la matriz X que nos piden y además, adelantaremos trabajo porque la inversa ya está calculada del apartado anterior. Tan sólo nos quedaría averiguar el valor de B^{50}:

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Así pues, dado que la potencia 3 de B se anula, podemos concluir que las sucesivas potencias de exponente superior también se anulan. En conclusión:

$$B^{50}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Así pues, la solución de la ecuación matricial propuesta será:

$$X=(I+B^{50})\,(I-B)^{-1}=I\cdot\,(I-B)^{-1}=\,(I-B)^{-1}$$

$$X=\,(I-B)^{-1}=C^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&8\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2: Considera la siguiente matriz cuadrada de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcula los siguientes determinantes: $|A^T|$, $|-2A|$, $|A^3|$, $|A^{-1}|$ y $\left|\frac{1}{5}\cdot A\cdot A^T\right|$

Esta actividad es fácil y rápida de resolver si conocemos las propiedades básicas de los determinantes. Primeramente, calcularemos el determinante de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (15-4-8)-(12-4-10) = 3+2 = 5$$

A partir de aquí, se trata de utilizar las propiedades de los determinantes estudiadas en clase:

$$|A^T| = |A| = 5$$

$$|-2A| = (-2)^3\cdot|A| = -8\cdot 5 = -40$$

$$|A^3| = |A|^3 = 5^3 = 125$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$$

$$\left|\frac{1}{5}\cdot A\cdot A^T\right| = \left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot|A|\cdot|A^T| = \left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot|A|\cdot|A| = \frac{5\cdot 5}{5^3} = \frac{1}{5}$$

PROBLEMA 3: **Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas**. En caso de ser verdadera proporciona una demostración de la misma y en caso de ser falsa propón un ejemplo donde se aprecie la falsedad de la proposición.

a) Toda matriz cuadrada A de orden n que cumple $A^2+3A-5I=0$ tiene inversa.

b) Dadas dos matrices cuadradas A y B se cumple que $|A+B| = |A|+|B|$

a) **VERDADERO**. Vamos a demostrarlo formalmente. Sabemos que:

$$A^2+3A-5I=0 \quad \Rightarrow \quad A^2+3A=5I \quad \Rightarrow \quad (A+3I)\cdot A=5I$$

Si dividimos ahora entre cinco la igualdad, obtenemos que:

$$(A+3I)\cdot A=5I \;\Rightarrow\; \frac{1}{5}(A+3I)\cdot A=I$$

Utilizando la definición de matriz inversa, observamos que la matriz $\frac{1}{5}(A+3I)$ al multiplicarla por la matriz A se obtiene la matriz identidad. Por tanto, la matriz $\frac{1}{5}(A+3I)$ es la inversa de A. Resumiendo:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}(A+3I)$$

Esto quiere decir que la matriz A tiene inversa, o lo que es lo mismo es regular.

b) **FALSO**. Para demostrar que una afirmación es falsa basta con encontrar un ejemplo donde se vea que la propiedad no se cumple. Así pues, imaginemos las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$$

Vemos que el determinante de la suma de ambas no coincide con la suma de los determinantes de cada una de ellas por separado:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{vmatrix}=4-6=-2$$

$$|A+B|=\left|\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0 \quad \text{pero} \quad |A|+|B|=-2+(-2)=-4$$