DOSSIER SEMANAL 05

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&0&-1&1\\2&3&1&0\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Determina qué matrices son invertibles.
b) Determinar el **rango** de cada una de las matrices propuestas mediante la técnica de determinantes.
c) Calcula la inversa de la matriz A **mediante el método de adjuntos**.
d) **Resolver**, si es posible, la ecuación matricial
$$AX-I=2X$$

a) Sabemos que una matriz es invertible si es cuadrada y su determinante es no nulo. Así pues, en este caso, lo que deberemos hacer será calcular los determinantes de cada matriz y comprobar cuáles valen cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=(1+1)-(0)=2$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=(-8+1+1)-(-2-2-2)=-6+6=0$$

El determinante de la matriz C lo calcularemos mediante adjuntos:

$$|C|=\begin{vmatrix}1&2&1&0\\1&0&-1&1\\2&3&1&0\\0&1&1&-1\end{vmatrix}=[C3'=C3+C4]=\begin{vmatrix}1&2&1&0\\1&0&0&1\\2&3&1&0\\0&1&0&-1\end{vmatrix}=1\cdot A_{21}+1\cdot A_{24}=$$

$$=-\begin{vmatrix}2&1&0\\3&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&1\\0&1&0\end{vmatrix}=-1+1=0$$

Así pues, **la matriz A es la única matriz invertible de las matrices propuestas**.

b) Calculemos el rango de cada matriz mediante el uso de determinantes. Dado que el determinante de la matriz A es distinto de cero, sabemos entonces que no existe dependencia lineal entre sus filas o columnas. Como consecuencia, su rango es 3.

En el caso de la matriz B, dado que su determinante es cero, concluimos que existe algún tipo de relación lineal entre sus filas/columnas. Ello nos lleva a concluir que su rango es menor que 3. Veamos si su rango es 2. Para ello, debemos comprobar si existe algún menor de orden 2 que no valga cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad Rg(B) < 3$$

Pero dado que: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Rg(B) = 2}$

En el caso de la matriz C, dado que su determinante es cero, concluimos que existe algún tipo de relación lineal entre sus filas/columnas. Ello nos lleva a concluir que su rango es menor que 4. Veamos si su rango es 3. Para ello, debemos comprobar si existe algún menor de orden 3 que no valga cero.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \quad Rg(C) < 4$$

Pero dado que: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Rg(C) = 3}$

c) Para ello, haremos uso de la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj^T(A)$$

Dado que ya sabemos el valor de su determinante ($|A| = 2$), calcularemos primeramente la matriz de adjuntos:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \ 1 \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \ 1$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \ 1 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \ 1$$
$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \ 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \ 1 \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Por tanto, **la inversa de la matriz A será**:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Primeramente, obtendremos el valor de la matriz X de forma algebraica:

$$AX - I = 2X \quad \rightarrow \quad AX - 2X = I \quad \rightarrow \quad (A - 2I) \cdot X = I$$

Ahora, deberíamos pre-multiplicar ambos miembros de la ecuación por la inversa de la matriz A-2I. Sin embargo, no podemos hacerlo ya que, si nos fijamos, la matriz A-2I coincide con la matriz B.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = B$$

Recordemos que la matriz B no tenía inversa (ya que su determinante es cero). Así pues, en este caso, no podemos obtener de forma única una matriz X que cumpla la ecuación propuesta. Trabajaremos este tipo de situaciones más adelante.

PROBLEMA 2: Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide **calcular los siguientes determinantes**:

a) $|A^3 \cdot A^{-1} \cdot A^T|$ b) $|A \cdot C|$ c) $|B \cdot D|$

d) $|(3A)^{-1}|$ e) $|-2C|$ f) $|B \cdot B^T|$

a) Para poder calcular de forma efectiva este determinante, debemos obtener primero el determinante de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Así pues:

$$|A^3 \cdot A^{-1} \cdot A^T| = |A^3| \cdot |A^{-1}| \cdot |A^T| = |A|^3 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot |A| = |A|^3 = (-1)^3 = -1$$

b) Este determinante no existe ya que no pueden multiplicarse las matrices A y C por tener dimensiones incompatibles.

Pedro A. Martínez Ortiz
www.maths4everything.com
@maths4everthink

c) En este caso:

$$|B \cdot D| \neq |B| \cdot |D|$$

ya que las matrices **B y D no son cuadradas**. Así pues, para poder calcular el determinante, no tenemos más remedio que realizar primero el producto de ambas matrices:

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$|B \cdot D| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

d) Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$|(3A)^{-1}| = \frac{1}{3^3} \cdot |A^{-1}| = \frac{1}{27 \cdot |A|} = -\frac{1}{27}$$

e) Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$|-2C| = (-2)^2 \cdot |C| = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 = 8$$

f) Como en el apartado c):

$$|B \cdot B^T| \neq |B| \cdot |B^T|$$

ya que **la matriz B no es cuadrada**. Debemos calcular primeramente el producto de las matrices que nos piden:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$|B \cdot B^T| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6$$

PROBLEMA 3: Calcula el rango de la siguiente matriz en función del parámetro real m

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m^2 \end{pmatrix}$$

Calcularemos primeramente el determinante de la matriz M:

$$|M| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix} = (m^4 + 1 + 1) - (m + m + m^2) = m^4 - m^2 - 2m + 2$$

Igualamos el determinante a cero, para ver qué valores del parámetro real m anulan el determinante:

$$|M| = m^4 - m^2 - 2m + 2 = 0$$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} & \end{array} \quad \rightarrow \quad (m-1)^2 \cdot (m^2 + 2m + 2) = 0$$

Resolviendo ahora la ecuación de segundo grado restante observamos que no tiene solución real:

$$m^2 + 2m + 2 = 0 \ \rightarrow \ m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

Así pues, el único valor de m que anula el determinante de la matriz M es $m = 1$. Esto nos lleva a distinguir dos casos:

CASO I: $\boldsymbol{m \neq 1} \ \rightarrow \ \boldsymbol{Rg(M) = 3}$ ya que el determinante de M no es cero y por tanto no existe dependencia lineal entre sus filas/columnas.

CASO II: $\boldsymbol{m = 1} \ \rightarrow \ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{Rg(M) = 1}$ ya que todas sus filas/columnas son iguales.