SOLUCIONES

# DOSSIER SEMANAL 01

*MATEMÁTICAS II*

*Por Pedro A. Martínez*

**PROBLEMA 1**: Considera las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) **Clasifícalas** atendiendo a la tipología estudiada en clase

b) **Calcula**, siempre que se pueda, las siguientes operaciones:

- $-2C+D$
- $C\cdot A$
- $[C\cdot D^t]^t$
- $(C^t-D)^2$
- $B\cdot A$
- $C\cdot A-2A\cdot D$

a) La matriz A es una matriz rectangular de dimensión 3x2. La matriz B es una matriz dila y su dimensión es 1x3. La matriz C es una matriz cuadrada de orden 3 (o dimensión 3x3) simétrica (ya que coincide con su traspuesta). La matriz D es una matriz cuadrada de orden 3, triangular superior (ya que por debajo de la diagonal principal todos los elementos son nulos)



b) Vamos ahora a calcular las operaciones con matrices propuestas en cada apartado, siempre que sea posible:

- $$-2C+D=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & -4 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

- $$C\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$$



- $$[C\cdot D^t]^t=\left[\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 4 & 10 & -8\\ -2 & -8 & 4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 3 & 10 & -8\\ 0 & -8 & 4\end{pmatrix}$$

- $$(C^t-D)^2=\left[\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\right]^2=\left[\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}\right]^2=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

- $B \cdot A = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \quad 1)$

- $C \cdot A - 2A \cdot D$ no puede realizarse ya que le producto $A \cdot D$ no puede efectuarse. El número de columnas de A no coincide con el número de filas de la matriz D.

**PROBLEMA 2**: Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \; con\ \alpha \in R$$

**Calcula** $A^{2019}$ y $B^n$ siendo $n$ un número natural cualquiera.

a) Calcularemos primeramente una expresión genérica para la potencia n-sima de la matriz A. Observemos qué comportamiento inicial presentan las primeras potencias:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parece ser que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizaremos el método de inducción para demostrar que ciertamente, esta expresión se corresponde con la potencia n-sima de la matriz A. Suponemos que la expresión anterior es cierta para n y vamos a verificar si se cumple para n+1:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{7} & \frac{n+1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que la expresión también se verifica para el natural n+1, podemos afirmar que la expresión propuesta es correcta para cualquier exponente natural. Así pues:

$$A^{2019} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2019}{7} & \frac{2019}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



b) Procedemos de forma análoga a como lo hicimos con la matriz anterior. Observamos que:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos^2\alpha - sen^2\alpha & -2\,sen\,\alpha\cos\alpha \\ 2\,sen\,\alpha\cos\alpha & cos^2\alpha - sen^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -sen\,2\alpha \\ sen\,2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$



$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -sen\,2\alpha \\ sen\,2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha\cos\alpha - sen\,2\alpha\,sen\,\alpha & -cos\,2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - sen\,2\alpha\cos\alpha \\ cos\,2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + sen\,2\alpha\cos\alpha & \cos 2\alpha\cos\alpha - sen\,2\alpha\,sen\,\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 3\alpha & -sen\,3\alpha \\ sen\,3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix}$$

Así pues, se observa que:

$$B^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -sen\,n\alpha \\ sen\,n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

**PROBLEMA 3**: Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) **Comprueba** si la matriz A verifica la relación $2\,(A-B)^2 + I = A \cdot B^t$ siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) ¿**Conmutan** las matrices A y B?

c) **Determina** qué tipo de matrices conmutan con la matriz B

a) Vamos a comprobar si la matriz A cumple la relación especificada. Observamos, primeramente, que:



$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2\,(A-B)^2 + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Mientras que:

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, podemos afirmar que la matriz A no cumple la relación propuesta.



b) Se puede observar fácilmente que las matrices A y B no conmutan:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Consideremos una matriz cualquiera X de dimensión 2x2 (ya que para que conmuten debe tener la misma dimensión que la matriz B):



$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Queremos que se verifique que:

$$X \cdot B = B \cdot X$$

Así pues:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Realizando las multiplicaciones, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a = a + 2c \\ 2a + b = b + 2d \\ c = c \\ 2c + d = d \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2c = 0 \\ a = d \\ c = c \\ 2c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} c = 0 \\ a = d \end{array}\right\}$$

Por tanto, las matrices que conmutan con la matriz B son de la forma:



$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ siendo a y b números reales cualesquiera