DOSIER DE ACTIVIDADES
MATEMÁTICAS II
BLOQUE DE ÁLGEBRA

La siguiente colección de actividades tiene como objetivo estructurar y aclarar ideas clave trabajadas durante el bloque de Álgebra mediante preguntas y actividades fundamentales.

Contenido

Unión Europea
Fondo Social Europeo
"El FSE invierte en tu futuro"
GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ, INVESTIGACIÓ, CULTURA I ESPORT

MATRICES: ELEMENTOS, CLASIFICACIÓN Y OPERACIONES BÁSICAS

1. Realiza un cuadro resumen que contemple cómo se realizan las **operaciones básicas** con matrices, cuándo pueden realizarse, relaciones dimensionales con el resultado y algún ejemplo numérico concreto. Revisa la suma/resta, producto por un escalar, producto de matrices y trasposición.

2. Considera las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&2&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}5&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

Calcula, siempre que sea posible, las siguientes operaciones:

a) $A+B$ b) $C\cdot(A+B)$ c) $C\cdot D$
d) $D\cdot C-2C$ e) $C\cdot C^T-D^2$ f) $A\cdot B+(2A)^T$

3. Determina cuáles de las siguientes **propiedades** de matrices son verdaderas. Justifica tu respuesta mediante una demostración (si es verdadera) o a través de un contraejemplo (en caso de que sea falsa).

☐	$A+B=B+A$	☐	$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
☐	$(A+B)+C=A+(B+C)$	☐	$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$
☐	$A\cdot B=B\cdot A$	☐	$(A^T)^T=A$
☐	$A\cdot I=I\cdot A=A$	☐	$(A+B)^T=A^T+B^T$
☐	$A\cdot(B+C)=B\cdot A+C\cdot A$	☐	$(A\cdot B)^T=A^T\cdot B^T$
☐	$A\cdot B=0$ entonces $A=0$ o $B=0$	☐	$(k\cdot A)^T=k\cdot A^T$ siendo $k\in\mathbb{R}$

4. Calcula la **potencia** n-sima de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

5. Calcula $A^{350}-A^{250}$ siendo $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}$, prueba que $A^3+I=0$ y luego calcula A^{10}.

DETERMINANTES

1. ¿Cómo podemos **calcular** el determinante de una matriz 2×2? ¿Y una matriz 3×3? ¿y una matriz 2×3? Escribe ejemplos para ilustrarlo.

2. Considera la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y contestad a las cuestiones:

   a) ¿Qué es un **menor complementario**? Calcula el menor complementario M_{21}
   b) ¿Qué es un **adjunto**? Calcula el adjunto A_{21}
   c) ¿Qué diferencia hay entre un adjunto y un menor principal?

3. ¿De qué formas podemos calcular el determinante de una matriz de **orden superior a 3**? ¿Son también válidos para matrices 2×2 y 3×3?

4. Lista las **propiedades** más importantes de los determinantes (incluye ejemplos).

5. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula los siguientes determinantes:

   a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -x & 4 & 2a \\ -z & 4 & 2c \\ -y & 4 & 2b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix}$

6. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

   Se pide calcular el valor de los siguientes determinantes:

   a) $|A|$ c) $|C|$ e) $|A+B|$ g) $|B^T \cdot A^2|$ i) $|A^T \cdot C \cdot A^3|$

   b) $|B|$ d) $|A \cdot C|$ f) $|C^4|$ h) $|-2A|$ j) $\left|\frac{1}{3} C \cdot C^T\right|$

7. Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $|A+B|$ b) $|A^{-1}\cdot B^T|$ c) $|2A|$ d) $|-6A^3|$ e) $|(3A)^3|$ f) $\left|\frac{1}{6}A^2\right|$

8. **Comprueba** el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 38$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 69$

9. Calcula el valor del determinante en función del parámetro real x: $\begin{vmatrix} 2 & x & x & x \\ x & 2 & x & x \\ x & x & 2 & x \\ x & x & x & 2 \end{vmatrix}$

10. **Resuelve** la ecuación: $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+1 & x & x \\ x & x & x+1 & x \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$

RANGO DE UNA MATRIZ

1. ¿**Qué es** el rango de una matriz? Utiliza ejemplos para explicarlo.

2. ¿Qué **valor máximo** puede tener el rango de una matriz de dimensión $n\ x\ m$ (con m<n)?

3. ¿De cuantas **formas diferentes** podemos calcular el rango de una matriz? Utiliza ejemplos para ilustrarlo.

4. **Determina el rango** de las siguientes matrices en función del parámetro real m:

a) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ -2 & m+1 & 2 \\ -3 & m-1 & m \end{pmatrix}$

5. Determina el **rango** de estas matrices rectangulares en función del parámetro real a:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & a \\ a & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 2a & a \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & a \\ a+1 & a \end{pmatrix}$

INVERSA DE UNA MATRIZ Y MÉTODOS DE CÁLCULO

1. ¿**Qué quiere decir** que la matriz A y B sean inversas una de la otra? ¿Qué otros términos se usan para decir que una matriz tiene inversa?

2. ¿Tienen inversa todas las matrices? Escribe un ejemplo de matriz que no tenga inversa.

3. ¿**Qué debe cumplir el rango** de una matriz para que tenga inversa?

4. ¿**Qué debe pasar con el determinante** de una matriz para que tenga inversa? ¿Qué relación existe entre el determinante de una matriz regular y el de su inversa?

5. ¿Qué tres **métodos** hemos estudiado para calcular la inversa de una matriz? ¿Cuándo conviene usar cada uno de ellos?

6. **Calcula** la inversa de las siguientes matrices. Usa en cada caso un método diferente.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. Determina cuáles de las siguientes **propiedades** son verdaderas. Justifica tu respuesta mediante una demostración (si es verdadera) o con un contraejemplo (si es falsa).

☐ $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ ☐ $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$ ☐ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

8. Calcula el valor de $|E^T|$, $\left|-\frac{1}{2}E\right|$, $|E^2|$y $\left|\sqrt[3]{20}\,E^{-1}\right|$ siendo $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. ¿Qué significa que dos matrices A y B sean inversas una de la otra? **Demuestra** que cualquier matriz M (cuadrada de orden n) que verifica la relación $M^2 - 3M - I = 0$ tiene inversa (donde I denota la matriz identidad de orden n).

10. Considera la matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ m & -1 & 2 \\ -1 & m & -2m \end{pmatrix}$ donde $m \in \mathbb{R}$. Contesta a las cuestiones:

   a) ¿Qué valores del parámetro m hacen **singular** a la matriz P?
   b) Determina el **rango** de P en función del parámetro real m.
   c) Para $m = 2$ **calcula la inversa** de P utilizando el método de adjuntos.

11. **Demuestra que** toda matriz cuadrada A de orden n que cumple $A^2 + 5A - I = 0$ (siendo I la matriz identidad de orden n) **es regular**.

12. Determina, en cada caso, los valores reales de x para que la matriz sea invertible. Tras ello, calcula la inversa de cada matriz en función de x.

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$

ECUACIONES Y SISTEMAS MATRICIALES

1. Si no está definida la división de matrices, ¿cómo podemos aislar la matriz X en la ecuación $A \cdot X = B$?

2. Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifica tu respuesta mediante una demostración (si es verdadera) o a través de un contraejemplo (en caso de que sea falsa).
   a) Las ecuaciones matriciales $A \cdot X = B$ y $X \cdot A = B$ tienen la misma solución.
   b) Dadas dos matrices A y B se cumple que si $A \cdot B = 0$ entones $A = 0$ o $B = 0$
   c) Dadas tres matrices cualesquiera A, B y C, se tiene que si $A \cdot B = A \cdot C$

3. Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:

$$\left.\begin{aligned} 5X + 3Y &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

4. **Despeja** la matriz X en cada una de las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX - 2B = C$	b) $A = CX$	c) $XB + B = A - 2X$
d) $XA + C = XB$	e) $(X^{-1}B)^{-1} = 3A$	f) $AX + BX = I$
g) $AXB + C = 4XB$	h) $(A^{-1}X^T)^{-1} = B^2$	i) $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$

5. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} r & -1 & 4 \\ 3 & r & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Determina los valores de debe adoptar el parámetro real r para que A sea **singular**.
   b) Para $r = -2$, calcula la **matriz inversa** A^{-1}
   c) **Determina** la matriz X que verifica la ecuación

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$$

6. Considera las matrices y contesta a las cuestiones planteadas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Determina qué matrices son invertibles.
   b) Determinar el **rango** de cada una de las matrices propuestas mediante la técnica de determinantes.
   c) Calcula la inversa de la matriz A **mediante el método de adjuntos**.
   d) **Resolver**, si es posible, la ecuación matricial $AX - I = 2X$

8. Se dice que una matriz cuadrada A es **ORTOGONAL** si su inversa coincide con su traspuesta. Dicho de otro modo: A es ortogonal si cumple que $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$ donde I es la matriz identidad. ¿**Qué valores** puede adoptar el determinante de una matriz ortogonal?

9. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) Determina los **valores del parámetro** real m para que la matriz A sea regular.
   b) Calcula el **valor de los determinantes**: $|B \cdot C|$, $|B^2 \cdot C^{-1}|$ y $|2 \cdot B^T|$
   c) Para $m = 2$, **calcula la matriz** cuadrada X de orden 3 que cumple $XA + C = 3B$

10. Sabiendo que las matrices D y C vienen dadas por:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

    Encuentra (si existen) dos matrices A y B que verifiquen:

$$\left.\begin{array}{r} 2A + 3B = C \\ -A + 5B = D \end{array}\right\}$$

11. Resuelve la ecuación matricial $A^2X = A - 3I$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

INTERPRETACIÓN, DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

1. ¿De cuántas formas podemos representar un sistema de ecuaciones lineales? Inventa un sistema y escríbelo en estas diferentes formas mencionadas.

2. ¿Cuántos **tipos** de sistemas de ecuaciones lineales existen atendiendo al número de soluciones?

3. ¿En qué consiste **discutir** un sistema de ecuaciones? ¿Es lo mismo discutir un sistema que **resolver** un sistema?

4. ¿Qué afirma el Teorema de **Rouché**-Fröbenius?

5. ¿De qué **opciones** disponemos para resolver un sistema compatible determinado? ¿Y uno que sea compatible indeterminado? ¿Y para uno que sea incompatible?

6. ¿Qué es un sistema de ecuaciones lineal **homogéneo**? ¿Qué tiene de especial?

7. **Discute y resuelve** el siguiente sistema de ecuaciones lineales para los posibles valores reales del parámetro m. Comprueba tus resultados haciendo uso de la **calculadora**.

$$\left.\begin{array}{r} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{array}\right\}$$

8. Inventa un sistema compatible determinado con una solución determinada elegida. Inventa un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones incluyan una solución determinada elegida. Inventa un sistema incompatible. ¿Podrías diseñar un algoritmo para crear sistemas lineales con la característica deseada?

9. **Discute y resuelve** los sistemas de ecuaciones dependientes del parámetro real m:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ z+my=0 \\ x+(1+m)y+mz=m+1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx+y=0 \\ x+my=0 \\ mx+my=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ y+z=1 \\ x+my+z=2 \end{cases}$

10. **Discute** el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro real m.

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1-m & 1 & 2 \\ m & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1-m \end{pmatrix}$$

11. **Discute** los sistemas de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a:

a) $\begin{cases} 2x+y+z+t=0 \\ ax-2y+z+4t=0 \\ 3x-y-z+4t=0 \\ -2x+4y-z+9t=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ (a-1)y+z=0 \\ x+ay+(a-1)z=a \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 3y+2x+z=0 \\ 4x-y+a^2z=a-1 \end{cases}$

12. **Discute y resuelve** los sistemas de ecuaciones dependientes del parámetro real k:

a) $\begin{cases} y+z=1 \\ (k-1)x+y+z=k \\ x-z+(k-1)y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=k \\ x+ky+k^2z=k \\ x+k^2y+kz=k \\ x+y+kz=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+ky+z=2 \\ 2x-z+y=1 \\ 3x+y-3=kz \end{cases}$

13. **Discute y resuelve** los sistemas de ecuaciones dependientes del parámetro real m:

a) $\begin{cases} mx-y=1 \\ -2x+(m-1)y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 2x_1-x_2=1 \\ 4x_1+3x_2=m \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx+my+z=0 \\ x+z-my=0 \end{cases}$

14. Se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$$

donde a, b y c son tres valores reales. Se pide **obtener razonadamente**:

a) La relación que deben verificar a, b y c para que el sistema sea compatible.
b) La solución del sistema cuando $a=-1$, $b=2$ y $c=3$
c) La solución del sistema cuando los valores a, b y c verifican la relación $a=c=-2b$
d) Los valores de a, b y c sabiendo que $(x,y,z)=(1,-1)$ sea una solución del sistema.

PLOT TWIST

1. Sean A y B dos matrices 3x3 de números reales, siendo A una matriz **diagonal**:
   a) ¿Podemos afirmar que $A \cdot B = B \cdot A$ para cualquier matriz B?

b) ¿Cómo debe ser A para que $A \cdot B = B \cdot A$ sea cual sea la matriz B?

2. Para una matriz cuadrada, se define su **traza** como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, considerad A y B matrices cuadradas 2x2. Se pide:
   a) Demuestra que $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
   b) ¿Se verifica que $Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$?
   c) ¿Se verifica que $Tr(A \cdot B) = Tr(A) \cdot Tr(B)$?
   d) Con resultados anteriores, demuestra que es imposible la relación $AB - BA = I$

3. Averigua razonadamente **el valor del determinante** de una matriz cuadrada A de orden 4 para la cual se cumple que $|-2A \cdot A^3 \cdot A^{-1}| = 128$

4. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) **Comprueba** si la matriz A verifica la relación $2\,(A-B)^2 + I = A \cdot B^t$
   b) ¿**Conmutan** las matrices A y B?
   c) **Determina** qué tipo de matrices conmutan con la matriz B

5. Sea A una matriz cuadrada tal que verifica la relación $A^2 - 7A = 5I$, donde I es la matriz identidad. Se pide, calcular razonadamente:
   a) Los **valores** reales de a y b para que $A^{-1} = aA + bI$
   b) Los **valores** reales de p y q para que $A^4 = pA + qI$
   c) El **determinante** de la matriz $[(2 \cdot B^{-1})^2]^T$ sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale 3.

6. **Demuestra** que la matriz M es singular para cuales quiera que sean los valores de los parámetros reales x, y, z y u

$$M = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ u & u & u \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{pmatrix}$$

7. **Demuestra** que para cualesquiera valores reales de a, b y c se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a) \cdot (c-a) \cdot (c-b)$$

   A este determinante se le conoce como *determinante de Vandermonde* (de orden 3).

8. **Demuestra** aplicando únicamente las propiedades de los determinantes (sin utilizar Sarrus ni el desarrollo por adjuntos) que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

9. Se dice que una matriz M es **ORTOGONAL** si al multiplicarla por su traspuesta se obtiene la matriz identidad, es decir si se cumple $M \cdot M^T = M^T \cdot M = I$.
   a) Averigua si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.
   b) Calcula el valor que puede adoptar el determinante de una matriz ortogonal.
   c) ¿**Son regulares** todas las matrices ortogonales?
   d) ¿Cuál es la inversa de una matriz ortogonal?

10. Se dice que una matriz H es **IDEMPOTENTE** si al multiplicarla por sí misma se obtiene la matriz identidad, es decir si se cumple $H \cdot H = H^2 = I$
    a) Averigua si la matriz $A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ es idempotente.
    b) Si B es una matriz idempotente, ¿cuánto vale B^n siendo n un número natural?
    c) ¿**Son regulares** todas las matrices idempotentes?
    d) ¿Cuál es la inversa de una matriz idempotente?

11. Sea A una matriz cuadrada de orden n **idempotente** (es decir, $A^2 = A$). Calcula B^2 sabiendo que $B = 2A - I$ (donde I es la matriz identidad de orden n)

12. Se dice que una matriz N es **NILPOTENTE** si existe algún valor natural k tal que $N^k = 0$.
    a) Averigua si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ es nilpotente.
    b) ¿Es invertible la matriz A del apartado anterior?
    c) ¿Puede existir una matriz nilpotente y regular? Justifica tu respuesta.

13. En álgebra lineal se dice que una matriz cuadrada A de orden n es **una matriz de giro** o rotación si es **ortogonal** y $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{1}$. Atendiendo a esta definición, considera la matriz $R(\alpha)$ siguiente y contesta a las cuestiones planteadas:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

    a) **Demuestra** que la matriz $R(\alpha)$ es una matriz de rotación en el espacio tridimensional (donde α representa el ángulo de giro)
    b) **Calcula** las matrices $\left[R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2020}$ y $\left[R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^{-1}$

14. Determina si las siguientes proposiciones son **verdaderas o falsas**. Justifica tu respuesta mediante una demostración (si es verdadera) o a través de un contraejemplo (en caso de que sea falsa).
    a) Una matriz cuadrada A de orden n y A^2 siempre poseen el mismo rango.

b) Dadas dos matrices cuadradas A y B se cumple que $|A+B| = |A| + |B|$
c) La suma de dos matrices simétricas es siempre otra matriz simétrica.
d) Toda matriz idempotente es regular.
e) Toda matriz ortogonal es regular.
f) Cualquier matriz nilpotente es regular.
g) La diagonal principal de una matriz simétrica no puede ser completamente nula.
h) Toda matriz cuadrada A de orden n que cumple $A^2 + 3A - 5I = 0$ tiene inversa
i) Dadas dos matrices A y B se cumple que si $A \cdot B = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$
j) $Rg(A \cdot B) = Rg(A) \cdot Rg(B)$

15. **Discute y resuelve** el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los parámetros reales α y β:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x + y + z = \beta \\ 2x + y \qquad = \beta \\ x + \alpha y + z = 2 \end{array}\right\}$$

16. **Determina** los valores de x para los cuales la matriz A es regular.

$$A = \begin{pmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{pmatrix}$$

17. Considera el siguiente sistema dependiente del parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{r} mx - y = 1 \\ my - x = 1 - 2m \end{array}\right\}$$

Determina el valor de m para que el sistema…:

a) … no tenga solución
b) … tenga infinitas soluciones
c) … tenga una única solución.
d) … tenga una solución en la que x=3

18. Dadas las matrices A y B, **calcula** A^{2025} y B^n siendo *n* un número natural cualquiera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \;\; con\ \alpha \in R$$

19. Obtener razonadamente:
 a. Todas las soluciones $(x \quad y \quad z)^T$ de la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b. El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que es regular y que verifica la ecuación $B^2 = B$

c. El determinante de la matriz cuadrada A que tiene 4 filas sabiendo que dicho determinante es positivo y que verifica la ecuación:

$$A^2 - 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

20. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $B_{2\times 2}$ sin elementos nulos que verifica la relación $B^2 = -7B + U$. Se pide obtener razonadamente:
   a) Los números reales a y b tales que $A^2 = aA + bU$
   b) Justificar que la matriz B es invertible
   c) Los números reales p y q tales que $B^{-1} = pB + qU$
   d) Obtener los valores de x e y para los cuales se verifica que $B^3 = xB + yU$

REVISA LO APRENDIDO

1. Considera las siguientes matrices y contesta a las cuestiones planteadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   a) **Clasifícalas** atendiendo a la tipología estudiada en clase
   b) **Calcula**, siempre que se pueda, las siguientes operaciones:
      - $-2C + D$
      - $C \cdot A$
      - $[C \cdot D^t]^t$
      - $(C^t - D)^2$
      - $B \cdot A$
      - $C \cdot A - 2A \cdot D$
   c) **Calcula** la matriz inversa de C

2. Considera las matrices cuadradas A y B de orden n. Determina para cada una de las siguientes afirmaciones si es **verdadera o falsa**. Demuestra las que son verdaderas y aporta contraejemplos para las falsas. ¿Puedes reformular las falsas de alguna forma para hacerlas verdaderas?

	$\lvert A \cdot B\rvert = \lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$
	$\lvert A^p\rvert = \lvert A\rvert^p$ siendo $p \in \mathbb{Z}$
	$\lvert A^{-1}\rvert = \dfrac{1}{\lvert A\rvert}$
	$\lvert A^T\rvert = \lvert A\rvert$
	$\lvert k \cdot A\rvert = k \cdot \lvert A\rvert$ siendo $k \in \mathbb{R}$
	$\lvert A + B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$

	$\lvert k \cdot A\rvert = k^n \cdot \lvert A\rvert$ siendo $k \in \mathbb{R}$
	Si en un determinante intercambiamos filas (o columnas), su valor no cambia.
	Si una matriz tiene una fila/columna de ceros, su determinante vale cero.
	Si en una matriz hay dependencia lineal entre alguna de sus filas/columnas, entonces su determinante es cero.
	Una matriz es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero.
	Si a una fila/columna se le añade una combinación lineal de otras filas/columnas, entonces el determinante de la matriz no cambia.
	El determinante de una matriz triangular equivale al producto de los elementos de su diagonal principal.
	$\begin{vmatrix} k\cdot a & k\cdot b & k\cdot c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} k+a & m+b & n+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & m & n \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} k\cdot a & k\cdot b & k\cdot c \\ k\cdot d & k\cdot e & k\cdot f \\ k\cdot g & k\cdot h & k\cdot i \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

3. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) **Calcula** A^n siendo n un número natural cualquiera.
b) Determina el **rango** de la matriz B en función del parámetro real m.
c) ¿Qué condición debe cumplir el rango de una matriz cuadrada para que sea regular? ¿Para qué valores de m es invertible la matriz B?
d) Para m=5 determina, si es posible la **inversa** de la matriz B
e) Para m=5, **determina** la matriz X que verifica $XB + C^t = A^3$

4. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide **calcular los siguientes determinantes**:

a) $|A^3 \cdot A^{-1} \cdot A^T|$
b) $|A \cdot C|$
c) $|B \cdot D|$
d) $|(3A)^{-1}|$
e) $|-2C|$
f) $|B \cdot B^T|$

5. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) **Comprueba** que la matriz A verifica la relación $A^2 - 3A + 2I = 0$
b) Demuestra que la matriz A es **regular** y calcula su inversa.
c) **Determina los valores reales** de α y β que verifican que $A^3 = \alpha A + \beta I$
d) Calcula (si existe) la **inversa** de las matrices B y C.
e) **Determina** la matriz X que verifica $AXC - B^{10} = B^T$

6. Considera la matriz:

$$A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 1 & x^2+1 \end{pmatrix}$$

Dependiente del parámetro real x y la matriz $B_{4\times 4}$ que verifica $B^2 = 2I - 3B$ siendo I la matriz identidad orden 4. Se pide:

a) Determinar qué valores del parámetro x hacen **invertible** la matriz $A(x)$.
b) **Demostrar** que la matriz B es regular.
c) **Encontrar** los valores reales de m y n que verifican $B^{-1} = mB + nI$
d) Para $x = 1$, **calcular** el determinante de la matriz $2A^5 \cdot A^T \cdot A^{-1}$
e) Para $x = 1$, **determinar** la matriz X que verifica $AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$

7. Considera las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 0 & 1 & 1+k \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores del parámetro real k para que la matriz M sea **invertible**.
b) Determina los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el sistema $M \cdot (x, y, z)^T = (0,0,0)^T$ sea compatible indeterminado.
c) Para $k = 0$, determina la **matriz X** que verifica: $XM - N = X$
d) Determina el valor del **determinante** de la matriz $(3N^2)^{-1}$

8. Considera la matriz cuadrada de orden 3 dada por $Z(x) = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & -4 & x+1 \\ 0 & 4 & -x \end{pmatrix}$

a) ¿Existe algún valor del parámetro real x para el cual la matriz propuesta es **singular**?
b) **Resuelve** la ecuación matricial dada por: $I + X \cdot Z(0) = 3 \cdot Z(1)$
c) Calcula el **determinante** de la matriz $2 \cdot [(Z(0))^2]^{-1}$

9. Considera las siguientes matrices y contesta a las cuestiones planteadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor de los **determinantes** $|-3A^T|$, $|A^{-1}\cdot B^2|$, $|A+B|$ y $|A\cdot(A\cdot B)^{-1}|$
b) Determina el **rango** de cada una de las matrices propuestas
c) **Resuelve**, si es posible, la ecuación matricial $A - X = XB$
d) **Resuelve**, si es posible, la ecuación matricial $AXB = BA$
e) **Resuelve**, si es posible, el sistema matricial

$$\left.\begin{array}{r} 2X+Y=A \\ X-2Y=B \end{array}\right\}$$

10. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \alpha\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & m & k\\ 0 & 1 & m\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

donde α, β, m, k son parámetros reales, se pide:

a) Determina los valores de los parámetros que hagan **invertible** a las matrices A y B.
b) **Calcula** la matriz A^{2020}
c) Calcula **la inversa de la matriz B**
d) Para $m = k = 2$, **resolver**, si es posible, la ecuación matricial $XB = A$

11. Considera una matriz cuadrada A regular de orden 4 formada por las filas F_1, F_2, F_3 y F_4 y cuyo determinante vale 3. Determina razonadamente el determinante de las matrices:

a) nA b) $\begin{pmatrix}2F_1-F_4\\ F_3\\ 7F_2\\ F_4\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-F_2\\ 2F_1\\ F_4+F_1\\ F_3+F_1-F_2\end{pmatrix}^T$ d) $\begin{pmatrix}F_2\\ 3F_1\\ F_4\\ F_3\end{pmatrix}^{-1}$

12. Considera las siguientes matrices y contesta a las cuestiones planteadas:

$$A=\begin{pmatrix}sen\,x & -\cos x & 0\\ \cos x & sen\,x & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

a) Demuestre que la matriz A es **invertible** para cualquier valor real de x.
b) Para $x=\pi$, calcule el **determinante** de A^2 , $3A$ y $A^T\cdot A^{-1}$
c) Para $x=\pi$, **halle la matriz X** que verifica la ecuación: $XA + B^T = C$

13. Considera las siguientes matrices cuadradas de orden 3:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

a) Demuestra que la matriz $T = C + B$ **es invertible**
b) **Calcula** la matriz T^{-1}

c) **Calcula**, si es posible, **la matriz** X que verifica la ecuación $BX = A - CX$
d) **Calcula el determinante** de la matriz D que verifica que $A = T^{-1} \cdot D \cdot T$

14. Considera la matriz cuadrada: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) **Comprueba** que la matriz A verifica la relación $A^2 + 4(A + I) = 0$.
b) **Calcula** (si existe) la matriz A^{-1}
c) **Halla** los valores reales x e y para los cuales se verifica $A^{-1} = xA + yI$

15. **Discute y resuelve** cada sistema de ecuaciones lineales en función de $a \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x + ay + az = 1 \\ x + (a+1)\,z + 2ay = 1 \\ 2x + ay + az = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + az = 2 \\ x + ay + z = 2a \\ x + y - az = 0 \end{cases}$

16. **Resuelve** la ecuación $\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$

17. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dependientes de $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Determina los valores de λ para que $A \cdot B$ sea invertible.
b) Determina los valores de λ para que $B \cdot A$ sea invertible.

¿DÓNDE ESTÁ EL ERROR?

Imagina que eres la profesora o profesor de un estupendo grupo de 2º de bachiller al que aprecias y quieres ayudar en todo lo posible para que crezcan en su aprendizaje matemático. En una evaluación formativa, donde les pides actividades semanales para revisar, estás observando su progreso. A continuación, se muestran algunas resoluciones de actividades que les has propuesto. **Detecta** (si existen) **errores** de cálculo o expresión matemática**, corrígelos para explicar** al alumno/a cómo progresar.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $(A+B)^T$ y $(A \cdot B)^T$

Primeramente, obtendremos las matrices traspuestas:

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Utilizando las propiedades de las matrices:

$$(A+B)^T = A^T+B^T = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^T = A^T\cdot B^T = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

2. Sabiendo que $\begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & x & y\end{vmatrix}=2$, calcula el determinante $\begin{vmatrix}a/2 & b/2 & c/2\\ 1 & x & y\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$

Para hacer esta actividad, usaremos las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix}a/2 & b/2 & c/2\\ 1 & x & y\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Multiplicamos por}\\ \text{2 la fila } F_1\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & x & y\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Intercambio}\\ F_2 \leftrightarrow F_3\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & x & y\end{vmatrix} = 2$$

3. Comprueba que la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ verifica la relación $A^2-3A+I=0$

Calcularé primero A^2:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

Ahora comprobaré la relación indicada:

$$A^2-3A+I = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

4. Sabiendo que A, B y C son matrices cuadradas de orden n, determina algebraicamente el valor de X en cada ecuación matricial, siempre que sea posible:

$$a)\ AX + 2X = B \qquad\qquad b)\ 2XA = B - XC$$

a) $AX + 2X = B \rightarrow (A+2)X = B \rightarrow$ si existe la inversa de $(A+2) \rightarrow$

$\rightarrow \underbrace{(A+2)^{-1} \cdot (A+2)}_{I} \cdot X = (A+2)^{-1} \cdot B \rightarrow \boxed{X = (A+2)^{-1} \cdot B}$

b) $2XA = B - XC \rightarrow 2XA + XC = B \rightarrow$ Si existe la inversa de C, entonces... $\rightarrow$

$\rightarrow 2XA + X\underbrace{C \cdot C^{-1}}_{I} = B \cdot C^{-1} \rightarrow 2XA + X = B \cdot C^{-1} \rightarrow$ Si existe la inversa de A $\rightarrow$

$\rightarrow 2X\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} - X = BC^{-1}A^{-1} \rightarrow 2X - X = BC^{-1}A^{-1} \rightarrow \boxed{X = B \cdot C^{-1} \cdot A^{-1}}$

5. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ -2 & 10 & 4 \\ -8 & -6 & 2 \end{vmatrix} \qquad\qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ -2 & 10 & 4 \\ -8 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \left[\text{Extraemos factor común}\right] = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (10 - 32 + 3 + 20 + 12 + 4) = 2 \cdot 17 = \boxed{34}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left[F_4 \rightarrow F_4 + F_2\right] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left[\text{Desarrollamos por adjuntos desde la 3ª columna.}\right] =$

$= \cancel{0 \cdot A_{13}} + (-1) \cdot A_{23} + (-1) \cdot A_{33} + \cancel{0 \cdot A_{43}} = \left[\begin{array}{l} \text{Calculemos los adjuntos:} \\ A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -16 \\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \end{array}\right] =$

$= (-1) \cdot (-16) + (-1) \cdot 5 = 16 - 5 = \boxed{11}$

6. Discute y resuelve (si es posible) el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \\ x + 2z + y = 3 \end{cases}$$

En primer lugar, expresaremos el sistema en forma matricial reducida:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{matrix} \right.\right) = A^*$$

Para discutir el sistema, utilizaremos el teorema de Rouché – Fröbenius. Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes A:

$$|A| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1+4-2-(-1+4+2) = 3-5 = -2 \neq 0$$

Como $|A| \neq 0$ entonces sabemos que $Rg(A)=3$.
En consecuencia, dado que A es submatriz de A^* y A^* puede tener como máximo rango 3 (porque tiene 3 filas) concluimos que $Rg(A^*)=3$.
Por el teorema de Rouché - Fröbenius sabemos que:

$$Rg(A) = Rg(A^*) = n^\circ \text{ incógnitas} = 3 \longrightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Por tanto tiene una única solución. Para resolverlo, usaremos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5 \qquad y = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Para obtener z, sustituimos en la 1ª ecuación (por ejemplo):

$$x + 2y - z = 1 \longrightarrow 5 + 2\cdot 1 - z = 1 \longrightarrow z = 6$$

Por tanto, la solución del sistema es $(x,y,z) = (5,1,6)$.

7. Discute el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro real:

$$\begin{cases} y + ax + az = 2 \\ ax - 2y - 2z = -1 \\ -z - y + 2x = 1 \end{cases}$$

Primeramente, ordenamos el sistema: $\left.\begin{array}{l} ax + y + az = 2 \\ ax - 2y - 2z = -1 \\ 2x - y - z = 1 \end{array}\right\}$ y lo escribimos en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ a & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right) = A^*$$

Para discutir el sistema, aplicaremos el teorema de Rouche-Fröbenius. Analizaremos primero el rango de la matriz de coeficientes A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2a - 4 - a^2 - (-4a + 2a - a) = -a^2 + 5a - 4$$

El rango de A dependerá de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ que anulen su determinante:

$$|A| = 0 \rightarrow -a^2 + 5a - 4 = 0 \rightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-2} = \frac{-5 \pm 3}{-2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Dado que hemos obtenido 2 posibles soluciones, debemos contemplar 3 posibles casos.

CASO I: $a \neq 4$ y $a \neq 1$

En este caso $|A| \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 3 = Rg(A^*) = n^{\circ}$ incógnitas

Por tanto, el sistema será Compatible Determinado (1 solución)

CASO II: $a = 1$

En este caso la matriz del sistema es:

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right.\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$ por lo que el rango de A será menor que 3. Veamos si hay una submatriz con determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$$

Dado que A es una submatriz de A^*, sabemos ya que como poco, el rango de A^* será 2. Veamos si es 3:

$$\left(\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix}\left|\boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}}\right.\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rg(A^*) = 2$$

En conclusión: $Rg(A) = 2 = Rg(A^*) < n^{\circ}$ incógnitas $\rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

CASO III: $a = 4$

En este caso, la matriz del sistema es:

$$\left(\begin{matrix} 4 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right.\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, pero como $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$

El rango de A^* será como mínimo 2. Veamos si es 3:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \rightarrow Rg(A^*) = 3$$

En conclusión: $Rg(A) = 2 \neq 3 = Rg(A^*) \rightarrow$ Sistema Incompatible.

En resumen:

$$\begin{cases} \text{Si } a \neq 1 \text{ y } a \neq 4 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \\ \text{Si } a = 1 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \\ \text{Si } a = 4 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \end{cases}$$

8. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$ siendo $a \in \mathbb{R}$. Determina para qué valores del parámetro real $a \in \mathbb{R}$ la matriz A es idempotente (es decir, $A^2 = A$).

Calculemos primeramente A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^2+a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^2 \end{pmatrix}$$

Queremos ver qué valores de $a \in \mathbb{R}$ cumplen que $A^2 = A$. Igualemos ambas matrices:

$$A^2 = A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2+a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Igualando término a término obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + a = a \\ a^2 = a \\ (1-a)^2 = 1-a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow a^2 + a - a = 0 \rightarrow a^2 = 0 \rightarrow a = 0 \\ \longrightarrow a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \\ \longrightarrow 1 + a^2 - 2a = 1 - a \rightarrow a^2 - a = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \end{array}$$

Conclusión: $A^2 = A$ cuando $\boxed{a=0}$ ó $\boxed{a=1}$