DOSSIER SEMANAL 10

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Determina los valores de los parámetros reales a, b, c y d para que la función $f(x)=a\cdot sen\ x+bx^2+cx+d$ tenga una recta tangente horizontal en el punto $P(0,4)$ y además su segunda derivada sea $f''(x)=3sen\ x-10$

Para que la función propuesta tenga una recta tangente horizontal en el punto $P(0,4)$ debe ocurrir que en dicho punto su derivada valga cero. Así pues:

$$f(x)=a\cdot sen\ x+bx^2+cx+d \quad\Rightarrow\quad f'(x)=a\cdot cos\ x+2bx+c$$

$$f'(0)=0 \quad\Rightarrow\quad f'(0)=a\cdot cos\ 0+2b\cdot 0+c=a+c \quad\Rightarrow\quad a+c=0$$

PEDRO A. MARTÍNEZ

Además sabemos que el punto $P(0,4)$ es un punto de la curva y en consecuencia cuando la $x=0$ la función deberá adoptar el valor $f(0)=4$. Así pues:

$$f(0)=a\cdot sen\ 0+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=d \quad\Rightarrow\quad d=4$$

Finalmente, sabemos que la segunda derivada de la función vale . Si la calculamos observamos que:

http://maths4everything.wixsite.com/inicio

$$f(x)=a\cdot sen\ x+bx^2+cx+d \quad\Rightarrow\quad f'(x)=a\cdot cos\ x+2bx+c$$
$$\Rightarrow\quad f''(x)=-a\cdot sen\ x+2b$$

Comparando ambas expresiones obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=3sen\ x-10 \\ f''(x)=-a\cdot sen\ x+2b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -a=3 \\ 2b=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a=-3 \\ b=-5 \end{array}\right\}$$

IES MACIÀ ABELA

Lo que nos lleva finalmente a que:

$$f'(0)=0 \quad\Rightarrow\quad a+c=0 \quad\Rightarrow\quad -3+c=0 \quad\Rightarrow\quad c=3$$

Así pues, la función cuyos parámetros deseábamos averiguar adopta la expresión:

$$f(x)=-3sen\ x-5x^2+3x+4$$

PROBLEMA 2: El *JET Propulsion Laboratory* de la *NASA* estudió durante todo un trimestre el movimiento del famoso meteorito MF-457 en su paso por nuestro sistema solar. De este análisis se concluyó que la trayectoria seguida por dicho meteorito viene descrita por la ecuación:

$$y^2 = 2x + 9 \quad \text{siendo } -\frac{9}{2} \le x \le 8 \text{ e } y \ge 0$$

siendo el Sol el origen de coordenadas del sistema de referencia considerado. A partir de esta información, se pide:

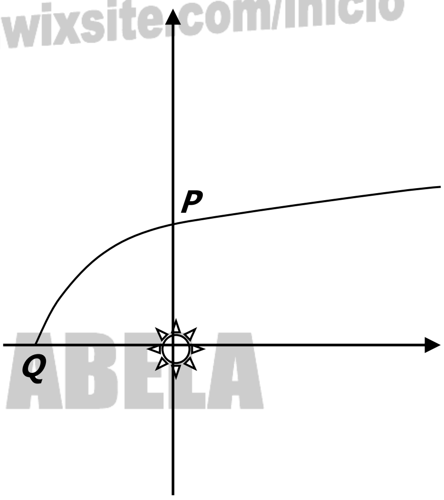
a) Calcular las coordenadas del punto P de la trayectoria donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol.

b) Determinar el valor de la distancia mínima del meteorito al Sol.

PEDRO A. MARTINEZ

La trayectoria del meteorito es una función irracional. Realicemos una representación gráfica aproximada de la curva para disponer de una visión gráfica del problema. Determinaremos para ello los cortes con los ejes coordenados:

http://maths4everything.wixsite.com/inicio



<u>CORTES CON EL EJE OY:</u>

$y^2 = 2x + 9 \quad \Rightarrow y = \sqrt{9} = \pm 3$

Pero sólo consideraremos la solución positiva porque en el enunciado nos dicen que la coordenada y es positiva.

$$P(0,3)$$

<u>CORTES CON EL EJE OX:</u>

IES MACIÀ ABELA

$y^2 = 2x + 9 \quad \Rightarrow 0 = 2x + 9 \quad \Rightarrow x = \dfrac{-9}{2}$

Por tanto, el punto de corte es $Q\left(-\dfrac{9}{2}, 0\right)$

a) Para obtener la distancia mínima del Sol al meteorito, primeramente debemos construir nuestra función objetivo. Dado que lo que queremos es minimizar la distancia, nuestra función objetivo será la distancia del meteorito al Sol (que se encuentra en el origen de coordenadas). Dado que el meteorito describe la trayectoria:

$$y^2 = 2x + 9 \quad \Rightarrow y = \sqrt{2x+9}$$

Podemos decir que sus coordenadas genéricas son: $M = (x, y) = \left(x, \sqrt{2x+9}\right)$

Así pues, la distancia de este punto al origen será:

$$d(M,O) = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \left\|\left(x, \sqrt{2x+9}\right) - (0,0)\right\| = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2x+9}\right)^2} = \sqrt{x^2+2x+9}$$

Por tanto, la función que proporciona la distancia del meteorito al Sol será:

$$d(x) = \sqrt{x^2+2x+9}$$

PEDRO A. MARTÍNEZ

Para obtener la distancia mínima lo que haremos será derivar la función distancia calculada en el apartado anterior y obtener sus extremos relativos.

$$d(x) = \sqrt{x^2+2x+9} \quad \Rightarrow \quad d'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+9}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

Comprobemos que es un mínimo:

http://maths4everything.wixsite.com/inicio

	-9/2	-1	8
Signo de la derivada	-	+	
Monotonía de la función	$\searrow$	$\nearrow$	

Así pues, la función alcanza un mínimo para $x=-1$. Las coordenadas del meteorito en este mínimo serán:

IES MACIÀ ABELA

$$d(x) = \sqrt{x^2+2x+9} \quad \Rightarrow \quad d(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 2\cdot(-1)+9} = \sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad P = \left(-1, \sqrt{8}\right)$$

b) Para conocer la distancia mínima simplemente debemos sustituir el valor de la coordenada x del mínimo en la función objetivo que proporciona la distancia (cosa que ya hemos hecho en el apartado previo)

$$d(x) = \sqrt{x^2+2x+9} \quad \Rightarrow \quad d(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 2\cdot(-1)+9} = \sqrt{8} \quad \textit{unidades}$$

PROBLEMA 3: Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int sen\ x \cdot e^{\cos x}\ dx$ b) $\int e^{-x} \cdot sen\ x\ dx$ c) $\int \frac{8}{4x^2+12x+13}\ dx$

a) La integral propuesta es semi-inmediata de tipo exponencial:

$$\int sen\ x \cdot e^{\cos x}\ dx = -\int -sen\ x \cdot e^{\cos x}\ dx = -e^{\cos x} + C \qquad C \in R$$

b) La integral propuesta se resuelve mediante integración por partes:

$$\int e^{-x} \cdot sen\ x\ dx = \begin{bmatrix} u = sen\ x & \rightarrow & du = cos\ x\ dx \\ dv = e^{-x}\ dx & \rightarrow & v = \int e^{-x}\ dx = -\int -e^{-x}\ dx = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

PEDRO A. MARTÍNEZ

$$= -e^{-x} \cdot sen\ x - \int -e^{-x} \cdot cos\ x\ dx =$$

$$= -e^{-x} \cdot sen\ x + \int e^{-x} \cdot cos\ x\ dx = \begin{bmatrix} u = cos\ x & \rightarrow & du = -sen\ x\ dx \\ dv = e^{-x}\ dx & \rightarrow & v = \int e^{-x}\ dx = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -e^{-x} \cdot sen\ x + \left[-e^{-x} \cdot \cos x - \int e^{-x} \cdot sen\ x\ dx \right] =$$

http://maths4everything.wixsite.com/inicio

$$= -e^{-x} \cdot sen\ x - e^{-x} \cdot \cos x - \int e^{-x} \cdot sen\ x\ dx$$

Hemos llegado a: $\int e^{-x} \cdot sen\ x\ dx = -e^{-x} \cdot sen\ x - e^{-x} \cdot \cos x - \int e^{-x} \cdot sen\ x\ dx$

Llamado $I = \int e^{-x} \cdot sen\ x\ dx$ tenemos que:

IES MACIÀ ABELA

$$I = -e^{-x} \cdot sen\ x - e^{-x} \cdot \cos x - I \quad \Rightarrow \quad 2I = -e^{-x} \cdot sen\ x - e^{-x} \cdot \cos x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{-e^{-x} \cdot sen\ x - e^{-x} \cdot \cos x}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{-e^{-x} \cdot (sen\ x + \cos x)}{2}$$

Así pues: $I = \int e^{-x} \cdot sen\ x\ dx = \frac{-e^{-x} \cdot (sen\ x + \cos x)}{2} + C \qquad C \in R$

c) La integral propuesta es de tipo arcotangente ya que las raíces del denominador son complejas y en el numerador hay una constante:

$$4x^2 + 12x + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 208}}{8} \notin R$$

Así pues, deberemos comenzar por averiguar con qué cuadrado perfecto puede ajustarse el denominador:

$$4x^2 + 12x + 13 = \underbrace{(2x+3)^2}_{4x^2+12x+9} + 4$$

Ello nos permite escribir:

PEDRO A. MARTÍNEZ

$$\int \frac{8}{4x^2 + 12x + 13}\,dx = \int \frac{8}{(2x+3)^2 + 4}\,dx = \left[\begin{array}{l} \text{Dividimos numerador y} \\ \text{denominador entre 4} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{2}{\frac{(2x+3)^2}{4} + 1}\,dx = \left[\begin{array}{l} \text{Introducimos en un único cuadrado} \\ \text{el primer sumando del denominador} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{2}{\left(\frac{2x+3}{2}\right)^2 + 1}\,dx = \int \frac{2}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 1}\,dx = 2 \cdot \int \frac{1}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 1}\,dx =$$

http://maths4everything.wixsite.com/inicio

$$= 2 \cdot arctg\left(x + \frac{3}{2}\right) + C \qquad C \in R$$

IES MACIÀ ABELA