DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS II

REPASO DEL BLOQUE DE ÁLGEBRA LINEAL

Lea todo el prospecto detenidamente antes de empezar a realizar la hoja de repaso.

- Conserve este prospecto. Puede tener que volver a leerlo.
- Si tiene alguna duda, consulte a su profesor o amigo/a que siempre saca buena nota.
- Esta hoja de repaso se le ha recetado a Vd. personalmente y no debe darla a otras personas. Puede perjudicarles, aun cuando sus síntomas sean los mismos que los suyos

Composición por cada 100 mg:

- 15 mg de **cálculo matricial**
- 15 mg de **cálculo de rangos**
- 10 mg de **resolución de ecuaciones matriciales**
- 10 mg de **cálculo de matrices inversas**
- 15 mg de **cálculo de determinantes**
- 10 mg de **aplicación de propiedades de los determinantes**
- 20 mg de **discusión y resolución de sistemas lineales**
- 5 mg de **ideas felices**

Antes de tomar "Repaso del bloque de Álgebra Lineal". No realice este repaso...:

- Si no está cursando Matemáticas II de 2º Bachillerato en el IES María Blasco.
- Si no ha dedicado tiempo a elaborar un esquema o resumen del contenido del bloque de Álgebra.
- Si usted no ha practicado (con anterioridad) los ejercicios similares realizados en clase.
- Si padece nerviosismo extremo cuando no le sale un problema.
- Si no ha dormido bien y se siente agotado y/o agobiado.

Dosis recomendada:

- 3 problemas diarios durante 15 días.

Efectos secundarios:

- Debe saber que si realiza este repaso puede sufrir un aumento de su conocimiento y habilidades matemáticas.
- También podría ganar herramientas y técnicas para enfrentarse a dificultades matemáticas.

Toma de otros medicamentos:

- Este producto no es incompatible con la realización de otros ejercicios similares. De hecho, el "Repaso del bloque de Álgebra Lineal" es más efectivo acompañado de otros repasos y/o **actividades trabajadas en clase con similar composición**.

Advertencias:

- Esta hoja de repaso no es apta para niños/as
- Después de realizar estos ejercicios se aconseja no trabajar con maquinaria pesada, conducir o realizar cualquier actividad de riesgo.
- Si usted toma más "Repaso de Álgebra Lineal" del que debiera, contacte urgentemente con su profesor: **maths4everything@gmail.com**

1. (Junio 2021) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + (a-1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

   a. **Estudiadlo** en función de los valores del parámetro real a
   b. Encontrad todas las **soluciones** del sistema cuando éste sea compatible.

2. (Junio 2021) Dada la matriz:

$$A(m) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{pmatrix}$$

   a. Obtened el **rango** de la matriz en función del parámetro real m.
   b. **Explicad** cuándo la matriz $A(m)$ es invertible.
   c. **Resolved** la ecuación $XA = I$ donde I es la matriz identidad en el caso m=1.

3. (Julio 2021) Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real m:

$$\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + +y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$$

   a. **Discute** el sistema en función del parámetro real m.
   b. La **solución** del sistema cuando m=1.
   c. Las **soluciones** del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

4. (Julio 2021) Considerando las matrices A y B, se pide obtener:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   a. El **rango** de la matriz A en función del parámetro real a.
   b. **Una matriz C** tal que , siendo I la matriz identidad, cuando a=0
   c. El **rango** de la matriz B y la **discusión** de si el sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

5. (Junio 2020) Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ y + z + ax = -2 \end{cases}$$

   a. **Discute** el sistema en función del parámetro real a.
   b. La **solución** del sistema cuando $a = -2$.
   c. La **solución** del sistema cuando $a = 0$.

6. (Junio 2020) Considerando las siguientes matrices dependientes del parámetro real b, se pide:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$$

   a. Los **valores** de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.
   b. Los **valores** de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa.
   c. La **inversa** de $A^T A$, cuando esta inversa exista.

7. (Julio 2020) Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y + az = -2 \\ x + y + 2z = a \end{cases}$$

   a. Obtén los valores de a que hagan al **sistema compatible**.
   b. La **solución** del sistema cuando $a = 0$.
   c. Las **soluciones** del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

8. (Julio 2020) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:
   a. La **justificación** de que A es regular y el **cálculo de su inversa**.
   b. El **valor de dos constantes** a y b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la relación $-3A^2 + 3A - I = 0$, siendo I la matriz identidad.
   c. El **valor real de λ** para que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar **todas las soluciones** del sistema.

9. (Junio 2019) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$ que depende del parámetro real a y la matriz B de orden 3 que verifica la relación $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$ siendo I la matriz identidad. Se pide:
   a. El **rango** de la matriz A en función del parámetro real a
   b. El **determinante** de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$
   c. Todas las **soluciones** del sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ de ecuaciones cuando $a = -1$
   d. La **comprobación** de que B es regular, encontrando los valores reales m y n que verifican $B^{-1} = mB + nI$

10. (Junio 2019) Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real α:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$$

   a. Los valores del parámetro α para los que el sistema es **compatible** y los valores de α para los que el sistema es **incompatible.**
   b. Todas las **soluciones** del sistema cuando sea compatible.
   c. La discusión de la compatibilidad del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

11. (Junio 2019) Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real α:

$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$$

   a. Los valores del parámetro α para los que el sistema es **compatible y determinado.**
   b. Todas las **soluciones** del sistema cuando $\alpha = -1$.
   c. El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$.

12. (Junio 2019) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Obtener razonadamente:
    a. Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución.
    b. Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$
    c. Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor real β de tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

13. (Junio 2018) Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:
$$\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$$
    a. Los valores del parámetro a para los que el sistema es **compatible determinado.**
    b. Todas las **soluciones** del sistema cuando $a = 3$.
    c. Las **soluciones** del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado.

14. (Junio 2018) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$ donde I es la matriz identidad. Calcula:
    a. Los **valores** de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$
    b. Los **valores** de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$
    c. El **determinante** de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2.

15. (Julio 2018) Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$$
    a. Los valores del parámetro a para los que el sistema es **compatible.**
    b. Las **soluciones** del sistema cuando $a = 1$.
    c. Las **soluciones** del sistema cuando $a = 0$.

16. (Julio 2018) Resolver los siguientes apartados de forma razonada:
    a. Dadas las matrices A y B cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y que $B^2 = B$
    b. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se pide encontrar los parámetros reales a y b para que la matriz $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ cumpla que $B^2 = B$ pero que $AB \neq A$ y $BA \neq B$
    c. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, calcula los determinantes $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z+1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

17. (Junio 2017) Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:
$$\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$$

a. Las **soluciones** del sistema cuando $a = 2$.
b. Los valores del parámetro a para los que el sistema es **compatible y determinado.**
c. Los valores del parámetro a para los que el sistema es **compatible e indeterminado** y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a.

18. (Junio 2017) Responde de forma razonada a cada uno de los siguientes apartados:
a. **Comprueba** que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3 **y obtén** la matriz C^4
b. Calcula el valor del **determinante** de la matriz $(3A^4) \cdot (4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1.
c. Obtén **la matriz B** que admite inversa y que verifica $B \cdot B = B$

19. (Julio 2017) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y $2B^3 = B$, siendo I la matriz identidad. Se pide obtener:
a. La justificación de que la matriz A es **invertible** y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I.
b. Los valores del **determinante** de B
c. El valor del **determinante** de la matriz B^2, sabiendo que B es regular.

20. (Julio 2017) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide obtener:
a. La justificación de que la matriz A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1} .
b. La justificación de que $A^4 = I$
c. El cálculo de las matrices A^7, A^{30} y A^{100}.

21. (Junio 2016) Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax - z = a \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

a. Los valores del parámetro a para los que el sistema es **incompatible.**
b. Todas las soluciones del sistema cuando sea **compatible e indeterminado**
c. La **solución** del sistema cuando $a = -1$.

22. (Junio 2016) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide obtener:
a. La **comprobación** de que $A^{-1} = 5^{-1}A^T$
b. Los valores del parámetro real $\boldsymbol{\lambda}$ para los cuales $A - \lambda I$ **no es invertible**, siendo I la matriz identidad.
c. El **determinante** de una matriz cuadrada B cuyo determinante es mayor que cero y verifica la ecuación $B^{-1} = B^T$

23. (Julio 2016) Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \end{cases}$$

a. La **solución** del sistema cuando $a = 0$.
b. Los valores del parámetro a para los que el sistema es **incompatible.**
c. Los valores del parámetro a para los que el sistema es **compatible y determinado** y obtener la **solución** del sistema en función del parámetro a.

24. (Julio 2016) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide obtener razonadamente:

a. El **determinante** de las matrices $A(2(B)^2)$ y $A(2(B)^2)\cdot(3A)^{-1}$
b. Las matrices A^{-1} y $((B\cdot A)^{-1}\cdot B)^{-1}$
c. La solución de la ecuación matricial $AX + BX = 3I$

25. (Junio 2015) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Obtener razonadamente:

a) La matriz **inversa** de la matriz *A*
b) Las matrices *X* e *Y* de orden 2 tales que $XA = B$ y $AY = B$
c) **Justificar** razonadamente que si *M* es una matriz cuadrada tal que $M^2 = I$, donde *I* es la matriz identidad del mismo orden que *M*, entonces se verifica la igualdad $M^3 = M^7$.

26. (Junio 2015) Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (1-\alpha)x & + & (2\alpha+1)y & + & (2\alpha+2)z & = & \alpha \\ \alpha x & + & \alpha y & + & & = & 2\alpha+2 \\ 2x & + & (\alpha+1)y & + & (\alpha-1)z & = & \alpha^2-2\alpha+9 \end{cases}$$

donde α es un parámetro real. Obtener razonadamente:

a) Todas las **soluciones** cuando $\alpha = 1$
b) La justificación razonada de si el sistema es compatible o incompatible cuando $\alpha = 2$
c) Los valores de α para los que el sistema es **compatible y determinado**.

27. (Julio 2015) Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x & + & 3y & + & z & = & \alpha \\ x & + & y & - & \alpha z & = & 1 \\ 2x & + & \alpha y & - & z & = & 2\alpha+3 \end{cases}$$

donde α es un parámetro real. Obtener razonadamente:

a) La **solución** del sistema cuando $\alpha = -1$
b) Todas las **soluciones** del sistema cuando $\alpha = 0$
c) El valor de α para el que el sistema es **incompatible**.

28. (Julio 2015) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Obtener razonadamente:

a. Los **valores de x** para los cuales la matriz B tiene inversa

b. Si el determinante de A es 8, calcula el **determinante** de A^3 y $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$

c. Los **valores de x, y, z** para los cuales se cumple: $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

29. (Junio 2014) Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 4y + 5z = k-2 \\ x + k^2 y + 3z = 2k \end{cases}$$

donde k es un parámetro real. Obtener razonadamente:

a) **Discutir** el sistema según los valores de k

b) Obtener todas las **soluciones** del sistema cuando $k=-1$

c) **Resolver** razonadamente el sistema cuando $k=0$

30. (Junio 2014) Dadas las matrices A, B y C se pide obtener razonadamente:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) La matriz **inversa** de la matriz A

b) La matriz X que es **solución** de la ecuación $AX=BC$

c) El **determinante** de la matriz $2M^3$, siendo M una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale 1/2.

31. (Julio 2014) Obtener, razonadamente:

a) La **relación** que debe cumplir el determinante de una matriz para que admita inversa.

b) El **determinante** de $S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y calcular su matriz **inversa**.

c) El **determinante** de la matriz $\left(4\cdot\left(T^2\right)\right)^{-1}$, sabiendo que T es una matriz cuadrada de 3 filas y que su determinante vale 20

d) La **solución** a de la ecuación:

$$\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$$

32. (Julio 2014) Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (1-\alpha)x + 2y + z = 4 \\ x + y - 2z = -4 \\ x + 4y - (\alpha+1)z = -2\alpha \end{cases}$$

donde α es un parámetro real. **Discute** el sistema en función de α **y resuélvelo** cuando $\alpha = 2$

33. (Junio 2013) Se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 5y = a \\ -x - 4y = b \\ 2x + y = c \end{cases}$$

donde a, b y c son tres valores reales. Se pide obtener razonadamente:

a) La relación que deben verificar los valores a, b y c para que el sistema sea **compatible**.
b) La **solución** del sistema cuando $a=-1, b=2$ y $c=3$
c) La **solución** del sistema cuando los valores a, b y c verifican la relación $a=c=-2b$.

34. (Junio 2013) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Se pide **obtener**:

a) $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}\cdot(A+B)^{-1}\right|$
b) $\left|(A+B)^{-1}\cdot A\right|$ y $\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right|$
c) $\left|2ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^3B^{-1}\right|$

35. (Julio 2013) **Comprobar**, razonadamente que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo entonces $A^2B^2 = (AB)^2$
b) Que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3A + 2I = 0$.
c) Que una matriz A que cumple $A^2 - 3A + 2I = 0$ **tiene inversa**.
d) Sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 - 3A + 2I = 0$, **calcula** razonadamente los valores α y β para que $A^3 = \alpha A + \beta I$

36. (Junio 2012) Obtener razonadamente:

a) Todas las **soluciones** $(x \quad y \quad z)^T$ de la ecuación: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) El **determinante** de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y que verifica la ecuación $B^2 = B$

c) El **determinante** de la matriz cuadrada A que tiene 4 filas sabiendo que dicho determinante es positivo y que la matriz A verifica la ecuación:

$$A^2 - 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

37. (Septiembre 2012) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B , donde B es una matriz de orden 2 que no tiene ningún elemento nulo y que verifica la relación $B^2 = -7B + U$. Se pide **obtener** razonadamente:

a) Los números reales a y b tales que $A^2 = aA + bU$

b) Los números reales p y q tales que $B^{-1} = pB + qU$

c) Justificar que la matriz B es **regular**

d) Obtener los valores x e y para los cuales se verifica que $B^3 = xB + yU$

38. (Junio 2011) Considera el sistema de ecuaciones:

$$S : \begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m + 1 \\ x + 3y + (m-2)z = m - 1 \end{cases}$$

donde m es un parámetro real. Obtener razonadamente:

a) Todas las **soluciones** del sistema cuando $m = 2$

b) Todos los **valores de *m*** para los cuales el sistema S tiene **solución única**.

c) El **valor de *m*** para el cual el sistema S admite la solución $(x, \quad y, \quad z) = \left(\frac{3}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad 0 \right)$

39. (Junio 2011 B) Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener razonadamente el **rango** o característica de la matriz A en función de los valores de m.
b) Explicar por qué la matriz A es **invertible** cuando $m=1$
c) Obtener razonadamente la matriz **inversa** A^{-1} de A cuando $m=1$.
d) **Comprobar** que los productos $A\cdot A^{-1}$ y $A^{-1}A$ proporcionan la matriz identidad.

40. (Septiembre 2011 A) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y M , donde M es una matriz de orden 2 que verifica $M^2=M$. Se pide obtener razonadamente:

a) Los valores reales de k para los que la matriz $B=A-kI$ es **regular**
b) La matriz **inversa** B^{-1} cuando $k=3$
c) Las **constantes reales** α **y** β para que se verifique que $\alpha A^2+\beta A=-2I$
d) **Comprobar** razonadamente que la matriz $P=I-M$ cumple las relaciones: $P^2=P$ y $MP=PM$.

41. (Septiembre 2011) Sean las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y T, donde T es una matriz cuadrada de orden 3 y cuyo determinante vale $\sqrt{2}$. **Calcula los determinantes** de las matrices:

a) $\frac{1}{2}T$ b) M^4 c) TM^3T^{-1}