CÁLCULO DE RECTA TANGENTE POR PUNTO EXTERIOR

Problema 1:
Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ que pase por el punto $A(1, 1)$.

Paso 1: **Comprobamos si el punto dado pertenece a la gráfica de la función**. Para ello, sustituimos el valor de la abscisa de $A(1, 1)$ en la función. Si el valor obtenido es igual a la 2ª coordenada deAentonces podremos decir que estará en la gráfica de $f(x)$

$$A(1, 1) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

Así pues, $A(1, 1)$ no pertenece a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$.

Paso 2: **Debemos averiguar el punto de tangencia de la recta y la función**.

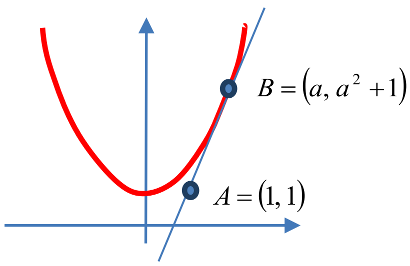
Para este segundo paso hay dos posibles vías de actuación: una de ellas basada en el cálculo de la pendiente mediante geometría analítica y otra basada en la relación de pertenencia de un punto a una recta.

MÉTODO 1: BASADO EN EL USO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Sabemos que la pendiente de la recta tangente puede calcularse a través de la derivada de la función:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

Pero también podemos calcularla haciendo uso de la geometría analítica:



$$\vec{AB} = B - A = (a, a^2 + 1) - (1, 1) = (a - 1, a^2)$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{a^2}{a - 1}$$

Así pues, **igualando ambas expresiones de la pendiente**:

$$m = f'(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{a - 1} = 2a \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2a \cdot (a - 1) \quad \Rightarrow \quad a^2 - 2a = 0$$

Por tanto, los puntos de tangencia en la función son:

$$a^2 - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad y \quad a = 2$$

MÉTODO 2: BASADO EN LA RELACIÓN DE PERTENENCIA

Sabemos que la ecuación de la recta tangente vendrá dada por la ecuación global:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Dado que:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 1 \quad &\Rightarrow \quad f(a) &= a^2 + 1 \\ f'(x) &= 2x \quad &\Rightarrow \quad f'(a) &= 2a \end{aligned}$$

Sustituyendo cada término por su expresión, observamos que la ecuación puede escribirse como:

$$y - (a^2 + 1) = 2a \cdot (x - a)$$

Ahora bien, sabemos (porque lo dice el enunciado) que el punto $A(1, 1)$ es un punto que pertenece a la recta tangente (pues queremos que ésta pase por dicho punto). Así pues, si cambiamos en la ecuación las variables x e y por las coordenadas de dicho punto, debe cumplirse la ecuación que define a la recta tangente. Es decir:

$$\begin{gathered} y - (a^2 + 1) = 2a \cdot (x - a) \\ 1 - (a^2 + 1) = 2a \cdot (1 - a) \\ 1 - a^2 - 1 = 2a - 2a^2 \\ a^2 - 2a = 0 \\ a \cdot [a - 2] = 0 \\ a = 0 \quad a = 2 \end{gathered}$$

Que son los mismos puntos que hemos obtenido mediante el método geométrico.

Paso 3: Las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica y que pasan por $A(1, 1)$ son:

$$a = 0 \quad \Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y - 1 = 0 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

$$a = 2 \quad \Rightarrow f'(2) = 2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y - 1 = 4 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \boxed{y = 4x - 3}$$

8 CÁLCULO DE RECTA TANGENTE POR PUNTO EXTERIOR

Problema 2: Dada la función $f(x) = x^3$ determina la ecuación de:

a) la recta tangente a la curva de la función $f(x)$ que pasa por el punto $P(-1, -1)$

b) la recta tangente a la curva de la función $f(x)$ que pasa por el punto $Q(2, 0)$

c) la recta normal a la curva de la función $f(x)$ que pasa por el punto $R(1, 1)$

Problema 3: Determina la ecuación dela recta tangente a la curva de la función $f(x) = x^2 + x + 1$ que:

a) pasa por el punto $P(-3, 7)$.

b) tiene pendiente $m = 5$

c) es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

d) pasa por el origen de coordenadas.

Problema 4: Determina la ecuación de la recta tangente a la curva de la función $f(x) = e^x$ que pasa por el origen de coordenadas.

SOLUCIONES:

2. a) $y = 3x + 2$

   b) $y = 27x - 54 \qquad y = \dfrac{-x + 732}{27}$

   c) $y = \dfrac{4 - x}{3}$

3. a) $y = -5x - 8$

   b) $y = 5x - 3$

   c) $y = x + 1$

   d) $y = 3x \qquad y = -x$

4. $y = e \cdot x$