	DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
I.E.S. MACIA ABELA	**MATEMÁTICAS II** **PROBLEMAS OPTIMIZACIÓN**

El alumno deberá resolver de forma razonada cada uno de los problemas propuestos. Cualquier ejercicio que no esté adecuadamente razonado y argumentado será considerado no válido.

Son todos los que están, pero no están todos los que son.
(Respuesta de un profe de matemáticas ante la pregunta:
¿Estos son todos los tipos posibles de problemas de optimización?)

1. Descomponer el número 20 en dos sumandos tales que su producto sea máximo.

2. De una lámina cuadrada de cartón de lado 60 cm. se debe cortar un cuadrado de lado x, de modo que, con el cartón resultante, y doblando convenientemente, se pueda construir una caja sin tapa. Determinar la longitud x para que la capacidad de la caja sea máxima. Hallar, además, el volumen de la caja resultante.

3. Un conservero ha de fabricar botes cilíndricos de 1 litro de capacidad para envasar tomate. Determinar las dimensiones que debe tener un bote para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.

4. De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 5 m, determinar el que tiene área máxima.

5. Se tiene un alambre de 2 metros de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con el primero un cuadrado y con el segundo una circunferencia. Hallar la longitud de cada trozo para que la suma de las áreas de las dos figuras sea mínima.

6. A las 12 h. de la noche, un barco A está a 75 km al este de otro B. El barco A navega hacia el oeste a 20 km/h y el B navega hacia el sur a 15 km/h. Si mantienen esos rumbos, ¿cuál será la mínima distancia entre ellos? y ¿a qué hora se producirá?

7. Sea T un triángulo de perímetro 60 m. Uno de los lados del triángulo T mide x cm y los otros dos lados tienen la misma longitud.

a) Deducir razonadamente las expresiones de las funciones A y f tales que:

$$A(x) = \text{Área del triángulo } T$$
$$f(x) = \{A(x)\}^2$$

Indicar además entre que valores puede variar x.

b) Obtener, razonadamente, el valor de x para el que la función f(x) alcanza un valor máximo.

8. Encontrar razonadamente el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcular el valor de esta pendiente.

9. Desde un punto N de la orilla del mar, un nadador debe alcanzar una boya que flota a 3 km de la costa y dista $3\sqrt{5}$ km del punto N. Si recorriendo la orilla (que se supone recta y plana), su velocidad media es de 5 km/h y nadando, de 3 km/h ¿Cuánto tiempo deberá caminar hasta lanzarse al mar, para alcanzar la boya en el menor tiempo posible?

10. Determinar razonadamente la longitud del lado del cuadrado de área mínima cuyos vértices están situados sobre los lados de otro cuadrado de lado 16 cm.

11. Calcular la longitud que deben tener los lados de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 4 m. para que el área del rectángulo sea máxima.

12. Una ventana está formada por un rectángulo y un triángulo equilátero que tiene por lado uno de los lados del rectángulo. El área del recinto es de 3 m^2. Calcular las dimensiones rectángulo para que el perímetro de la figura sea mínimo.

13. Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?

14. Una agencia inmobiliaria tiene alquilados 200 apartamentos en una ciudad a 160 € al mes cada uno. Por cada 5 € de aumento en el alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro apartamento más económico. ¿Cuál es el alquiler que produce mayor beneficio a la agencia?

15. Dados dos postes de alturas 12 y 18 metros, distantes 30 metros, se quieren unir sus puntas mediante un cable metálico tenso que toque el suelo en un punto intermedio. ¿En qué punto entre ambos postes debe tocar dicho cable para que su longitud sea mínima?

16. Se estima que el coste de la construcción de un edificio de oficinas que tiene n plantas es:

$$C(n) = 2\,n^2 + 500\,n + 600 \text{ cientos de euros}$$

¿Cuántas plantas deberá tener el edificio para que el coste medio por planta sea el menor posible? Discutir la solución.

17. Con un alambre de 1 m queremos construir el borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones hay que dar al rectángulo?

18. Hallar las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 500 m^3 de capacidad, que tenga un revestimento de coste mínimo.

19. Se considera una ventana rectangular rematada en la parte superior por un triángulo equilátero. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6,6 m, hallar sus dimensiones para que su superficie sea máxima.

20. Una ventana *normanda* consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. Encontrar las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es de 10 m.

21. En una oficina de correos sólo se admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además la suma de ancho, alto y largo debe ser de 72 cm. Hallar las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.

22. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

23. Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto de área total 150 cm^2 y volumen máximo. Determinar su generatriz y su radio.

24. Un triángulo isósceles de perímetro 10 m gira alrededor de la altura relativa al lado desigual y engendra un cono. Hallar sus lados para que el cono tenga volumen máximo.

25. Hallar la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar la vuelta completa alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.

26. Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto A(1, 2), aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área máxima. Calcular también el área.

27. Un campo de petróleo tiene 8 pozos que producen un total de 1600 barriles de crudo al día. Por cada pozo nuevo que se perfora, la producción media por pozo disminuye en 10 barriles diarios. ¿Cuántos pozos adicionales se deben perforar para obtener la mayor producción de crudo al día?

28. Se desea construir con el mínimo costo una caja con base cuadrada y volumen 1000 cm^3. El precio de un cm^2 del material utilizado en la tapa de la caja es el triple que el precio de un cm^2 del material utilizado para la base y las caras laterales. Obtener, razonadamente, las dimensiones de la caja.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN P.A.U.
ÚLTIMAS CONVOCATORIAS

JULIO 2017. Se considera el triángulo *T* de vértices *O* = (0, 0), *A* = (*x*, *y*) y *B* = (0, *y*), siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados *OA* y *AB* es 30 metros. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo *T* en función de *x*.
b) El valor de *x* para el que dicha área es máxima.
c) El valor de dicha área máxima.

JUNIO 2017. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que M = (0, 6), P = (x, 0) y N = (18, 0). El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El costo total C de los dos cables en función de la x del punto P, cuando $0 \le x \le 18$.
b) El valor de x, con $0 \le x \le 18$, para el que el costo total C es mínimo.
c) El valor de dicho costo total mínimo.

JULIO 2016. La diferencia de potencial x entre dos puntos de un circuito eléctrico provoca el paso de una corriente eléctrica de intensidad y, que está relacionada con la diferencia de potencial x por la ecuación $y = -x^2 - x + 6$, siendo $0 \le x \le 2$. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La gráfica de la función $f(x) = -x^2 - x + 6$ y deducir, gráfica o analíticamente, el valor de la intensidad y cuando la diferencia de potencial x es 0 y el valor de la diferencia de potencial x al que corresponde una intensidad y igual a 0, siendo $0 \le x \le 2$.
b) El valor de la diferencia de potencial x para el que es máximo el producto $y \cdot x$ de la intensidad y por la diferencia de potencial x, cuando $0 \le x \le 2$, y obtener el valor máximo de dicho producto $y \cdot x$, cuando $0 \le x \le 2$
c) El área de la superficie situada en el primer cuadrante limitada por la curva y = f(x), el eje de abscisas y el eje de ordenadas.

JUNIO 2016. Cada día, una planta productora de acero vende x toneladas de acero de baja calidad e y toneladas de acero de alta calidad. Por restricciones del sistema de producción debe suceder que:

$$y = \frac{23 - 5x}{10 - x} \quad siendo\ 0 < x < \frac{23}{5}$$

El precio de una tonelada de acero de alta calidad es de 900 euros y el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 300 euros. **<u>Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) Los ingresos obtenidos en un día en función de x
b) Cuántas toneladas de cada tipo de acero se deben vender en un día para que los ingresos obtenidos ese día sean máximos.
c) El ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día.

JULIO 2015. Se va a construir un depósito de 1500 m^3 de capacidad, con forma de caja abierta por la parte superior. Su base es un cuadrado y las paredes laterales son cuatro rectángulos iguales perpendiculares a la base. El precio de cada m^2 de la base es de 15€ y el precio de cada m^2 de pared lateral es de 5€. **<u>Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) El coste total del depósito en función de la longitud x de un lado de la base.
b) Las longitudes del lado de la base y de la altura del depósito para que dicho coste total sea mínimo
c) El valor del mínimo coste total del depósito.

JUNIO 2015. Un pueblo está situado en el punto A (0, 4) de un sistema de referencia cartesiano. El tramo de un río situado en el término municipal del pueblo describe la curva:

$$y = \frac{x^2}{4} \quad siendo -6 < x < 6$$

<u>Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) La distancia entre un punto P (x, y) del río y el pueblo en función de la abscisa x de P
b) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia mínima del pueblo
c) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia máxima del pueblo.

JULIO 2014. Un club deportivo alquila un avión de 80 plazas para realizar un viaje a la empresa VR. Hay 60 miembros del club que han reservado su billete. En el contrato de alquiler se indica que el precio de un billete será 800 euros si sólo viajan 60 personas, pero que el precio por billete disminuye en 10 euros por cada viajero adicional a partir de esos 60 viajeros que ya han reservado el billete. **<u>Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) El total que cobra la empresa VR si viajan 61, 70 y 80 pasajeros.
b) El total que cobra la empresa VR si viajan 60 + x pasajeros, siendo $0 \le x \le 20$
c) El número de pasajeros entre 60 y 80 que maximiza lo que cobra en total VR

SEPTIEMBRE 2012. Se desea construir un depósito cilíndrico de 100 m^3 de capacidad, abierto por la parte superior. Su base es un círculo en posición horizontal de radio x y la pared vertical del depósito es una superficie cilíndrica perpendicular a su base. El precio del material de la base del depósito es 4 euros/m^2. El precio del material de la pared vertical es 2 euros/m^2. **<u>Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) El área de la base en función de su radio x

b) El área de la pared vertical del cilindro en función de x
c) La función f(x) que da el coste del depósito
d) El valor x del radio de la base para que el coste del depósito es mínimo y el valor de dicho coste mínimo.

JUNIO 2012. Para diseñar un escudo se dibuja un triángulo *T* cuyos vértices vienen dados por: $A = (0, 12)$, $B = (-x, x^2)$ y $C = (x, x^2)$, siendo $x^2 < 12$. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo *T* en función de la abscisa *x* el vértice C
b) Los vértices *B* y *C* para que el área del triángulo sea máxima

SEPTIEMBRE 2011. Un coche recorre el arco de parábola Γ de ecuación

$$2y = 36 - x^2 \quad \text{siendo} \quad -6<x<6$$

Se representa por *f(x)* a la distancia del punto (0, 9) al punto (x, y) del arco Γ donde está situado el coche. Se pide **obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La expresión de *f(x)*
b) Los puntos del arco Γ donde la distancia *f(x)* tiene mínimos relativos
c) Los valores máximo y mínimo de la distancia *f(x)*
d) El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos (– 6, 0) y (6, 0)

JUNIO 2011. Se desea construir un campo rectangular de vértices *A*, *B*, *C* y *D* de forma que:

- Los vértices *A* y *B* sean puntos del arco de la parábola $y = 4 - x^2$, $-2 \leq x \leq 2$, y el segmento de extremos *A* y *B* es horizontal.
- Los vértices *C* y *D* sean puntos del arco de la parábola $y = x^2 - 16$, $-4 \leq x \leq 4$, y el segmento de extremos *C* y *D* es horizontal.
- Los puntos *A* y *C* deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real positivo *x*.
- Los puntos *B* y *D* deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el real negativo – *x*.

Se pide **obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La expresión *S(x)* del área del campo rectangular en función del valor real positivo x.
b) El número real positivo x para el que el área *S(x)* es máxima.
c) El valor del área máxima.

SOLUCIONES

1	10 y 10	**15**	Distancia al poste menor = 12 m
2	10 cm., V=16000 cm^3	**16**	17 plantas
3	$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$; $h = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$	**17**	25 cm cada lado
4	Catetos: $x = y = \frac{5}{\sqrt{2}}$	**18**	base = 5 ; altura = 10
5	$\frac{8}{4+\pi}$ y $\frac{2\pi}{4+\pi}$	**19**	Lado del triángulo ≈ 1'54 m , otro lado del rectángulo ≈ 0'98 m
6	t = 2,4 horas ; distancia = 45 km ; hora: 2 h 24 min	**20**	$\frac{20}{4+\pi}$ y $\frac{10}{4+\pi}$
7	a) $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{900-30x}$; $f(x) = \frac{1}{4}x^2(900-30x)$; $0 < x \le 30$; b) x = 20 m	**21**	Es un cubo de lado 24 cm
8	Punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$; $m = \frac{-9}{8\sqrt{3}}$	**22**	5 cm y 10 cm
9	t = 45 min	**23**	$r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$; $h = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$
10	$l = 8\sqrt{2} = \sqrt{128}$	**24**	base = 4 cm ; lados iguales = 3 cm
11	$x = y = \sqrt{32}$	**25**	20 cm y 10 cm
12	$x = \sqrt{\frac{12}{6-\sqrt{3}}}$	**26**	$x + 2y - 4 = 0$ $\quad Area = 4$
13	Equilátero de 10 cm de lado	**27**	6 pozos
14	84 €	**28**	lado base = $\sqrt[3]{500}$ altura = $\frac{100}{\sqrt[3]{250}}$