SOLUCIONES

DOSSIER SEMANAL 16

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: **Discute y resuelve** el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro real α:

$$\begin{cases} x+\alpha y+z=\alpha+2 \\ x+y+\alpha z=-2(\alpha+1) \\ \alpha x+y+z=\alpha \end{cases}$$

Discutiremos el sistema utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema según los valores del parámetro α.

$$\begin{cases} x+\alpha y+z=\alpha+2 \\ x+y+\alpha z=-2(\alpha+1) \\ \alpha x+y+z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} \alpha+2 \\ -2(\alpha+1) \\ \alpha \end{matrix}\right.\right)=A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real α:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+\alpha^3+1-\alpha-\alpha-\alpha=\alpha^3-3\alpha+2$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro α, anulan este determinante. Es decir:

$$|A|=\alpha^3-3\alpha+2=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1\ (doble) \\ \alpha=-2 \end{cases}$$

Esto nos permite distinguir tres casos posibles:

CASO I: $\alpha \neq 1 \quad y \quad \alpha \neq -2$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha+2 \\ 1 & 1 & \alpha & -2(\alpha+1) \\ \alpha & 1 & 1 & \alpha \end{array}\right)$	En este caso, dado que el determinante de la matriz de coeficientes no es cero, podemos asegurar que el rango de dicha matriz es 3. Así mismo, la matriz ampliada como mucho puede tener rango 3 (al poseer únicamente tres filas) y dado que contiene a la matriz A que es de rango 3, podemos concluir que su rango también es tres. Como conclusión, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius el sistema en este caso quedaría clasificado como **<u>SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO</u>** ya que: $R(A) = R(A^*) = 3 = NUM.INCÓGNITAS$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha+2 & \alpha & 1 \\ -2(\alpha+1) & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{\alpha^3+\alpha^2-2\alpha}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha+2)}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & -2(\alpha+1) & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{(\alpha-1) \cdot (\alpha+2)^2}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{\alpha+2}{\alpha-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha+2 \\ 1 & 1 & -2(\alpha+1) \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{-2(\alpha-1) \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha+2)}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{-2 \cdot (\alpha+1)}{\alpha-1}$$

Así pues, la solución del sistema será:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}, \frac{\alpha+2}{\alpha-1}, \frac{-2 \cdot (\alpha+1)}{\alpha-1} \right)$$

CASO II: $\alpha = 1$	
$$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$	En este caso, sabemos que la matriz de coeficientes no es de rango 3. De hecho, dado que todos los menores de orden 2 son nulos (obsérvese que todas las filas de A son idénticas), podemos afirmar que: $$Rg(A) = 1$$ Ahora bien, el rango de la matriz ampliada, en este caso es dos ya que podemos encontrar al menos un menor de orden 2 distinto de cero: $$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Rg(A^*) = 2$$ Así pues, dado que: $1 = R(A) \neq R(A^*) = 2$ por el Teorema de Rouchè-Frobënius, podemos afirmar que el sistema es **INCOMPATIBLE**. En consecuencia, no tiene solución.

CASO II: $\alpha = -2$	
$$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$	Para discutir este caso concreto, emplearemos el método de Gauss: $$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{F2=F2-F1 \\ F3'=F3+2F1}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$ $$\overset{F3'=F3+F2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ A la vista del resultado, observamos que: $$R(A) = R(A^*) = 2 < NUM.INCÓGNITAS = 3$$ por el Teorema de Rouchè-Frobënius, podemos afirmar que el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

Vamos a resolver este último caso aprovechando el resultado obtenido por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xRightarrow[F3'=F3+2F1]{F2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right) \xRightarrow{F3'=F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos en el sistema un grado de libertad. Denotando por ejemplo, $z=\lambda$ siendo λ un parámetro real, tendríamos que la solución del sistema sería:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x-2y+z=0 \\ 3y+3z=2 \\ y=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x=2\lambda-\dfrac{2-3\lambda}{3} \\ z=\dfrac{2-3\lambda}{3} \\ y=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x=\dfrac{9\lambda-2}{3} \\ y=\lambda \\ z=\dfrac{2-3\lambda}{3} \end{array}\right\} \quad con\ \lambda\in R$$

Resumiendo el estudio del sistema:

CASO	TIPO DE SISTEMA	SOLUCIÓN
$\alpha\neq 1$ $\alpha\neq -2$	COMPATIBLE DETERMINADO	$(x,y,z)=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1},\dfrac{\alpha+2}{\alpha-1},\dfrac{-2\cdot(\alpha+1)}{\alpha-1}\right)$
$\alpha=1$	INCOMPATIBLE	No tiene solución
$\alpha=-2$	COMPATIBLE INDETERMINADO	$(x,y,z)=\left(\dfrac{9\lambda-2}{3},\lambda,\dfrac{2-3\lambda}{3}\right)\quad con\ \lambda\in R$

PROBLEMA 2: Considera las siguientes matrices cuadradas de orden 3:

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&4&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-3&0\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&4&0\\-1&0&-1\\0&2&0\end{pmatrix}$$

a) Demuestra que la matriz $T=B+C$ **es invertible**

b) **Calcula** la matriz T^{-1}

c) **Calcula**, si es posible, **la matriz** X que verifica la ecuación:

$$BX=A-CX$$

d) **Calcula el determinante** de la matriz D que verifica que:

$$A=T^{-1}\cdot D\cdot T$$

a) Para ello simplemente hemos de ver que el $|T|$ es distinto de cero. Así pues:

$$T=B+C=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-3&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&4&0\\-1&0&-1\\0&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$$

Y el determinante de dicha matriz es:

$$|T|=|B+C|=\begin{vmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=-6-4-2+3+4+4=-12+11=-1\neq 0$$

En consecuencia, la matriz T es regular, es decir, es invertible.

b) Calculemos la matriz inversa utilizando, por ejemplo, el procedimiento por adjuntos.

Aplicaremos la fórmula:

$$T^{-1}=\frac{Adj^T(T)}{|T|}$$

Calculamos ahora la matriz de adjuntos:

$$Adj_{11}(T)=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad Adj_{12}(T)=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad Adj_{13}(T)=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$$

$$Adj_{21}(T)=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2 \qquad Adj_{22}(T)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad Adj_{23}(T)=-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$Adj_{31}(T)=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-1 \qquad Adj_{32}(T)=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1 \qquad Adj_{33}(T)=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-2$$

Así pues:

$$Adj(T)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1}=\frac{Adj^{T}(T)}{|T|}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

c) Si intentamos despejar la matriz X de la ecuación propuesta, observamos que:

$$BX=A-CX \Rightarrow BX+CX=A \Rightarrow (B+C)\cdot X=A \Rightarrow T\cdot X=A$$

$$\Rightarrow T^{-1}\cdot T\cdot X=T^{-1}\cdot A \Rightarrow X=T^{-1}\cdot A$$

Así pues:

$$X=T^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\ -1 & -3 & -2\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

d) Aplicando las propiedades de los determinantes, observamos que:

$$|A|=\left|T^{-1}\cdot D\cdot T\right| \Rightarrow |A|=\left|T^{-1}\right|\cdot|D|\cdot|T| \Rightarrow |A|=\frac{1}{|T|}\cdot|D|\cdot|T| \Rightarrow |A|=|D|$$

Así pues:

$$|D|=|A|=\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix}=-6-4-4+2+8+6=-14+16=2$$

PROBLEMA 3: En álgebra lineal se dice que una matriz cuadrada *A* de orden n es **una matriz de giro o rotación** si cumple que *A* es ortogonal y $\det(A)=1$. Atendiendo a esta definición se pide:

a) **Demuestra** que la matriz

$$R(\beta)=\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

es una matriz de rotación en el espacio tridimensional (β se corresponde con el ángulo de giro)

b) **Calcula** $\left[R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^n$

a) Simplemente hemos de comprobar que la matriz $R(\beta)$ propuesta cumple las dos condiciones necesarias características de una matriz de rotación:

- Veamos primero que la matriz $R(\beta)$ es ortogonal. Recordemos que una matriz es ortoganal cuando su inversa coincide con su traspuesta. Para ello, tenemos la opción de calcular la matriz inversa $R^{-1}(\beta)$ mediante el uso de adjuntos y comprobar que ésta coincide con $R^T(\beta)$, o bien, (que es lo que haremos) comprobar que al multiplicar la matriz $R(\beta)$ por su traspuesta se obtiene la matriz identidad.

$$R(\beta)\cdot R^T(\beta)=\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar también fácilmente que ambas matrices conmutan:

$$R^T(\beta)\cdot R(\beta)=R(\beta)\cdot R^T(\beta)=I$$

Así pues, concluimos de estas relaciones que la inversa de $R(\beta)$ es $R^T(\beta)$, es decir: $R^{-1}(\beta)=R^T(\beta)$

- Finalmente comprobamos que el determinante de la matriz propuesta es uno.

$$|R(\beta)| = \begin{vmatrix} cos\ \beta & 0 & sen\ \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\ \beta & 0 & cos\ \beta \end{vmatrix} = cos^2\beta + sen^2\beta = 1$$

Como conclusión podemos afirmar que **la matriz $R(\beta)$ propuesta es una matriz de rotación**.

b) Ahora, sabemos que el ángulo de giro es de $\frac{\pi}{2}$ rad. Por tanto, la matriz a utilizar es:

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} cos\ \frac{\pi}{2} & 0 & sen\ \frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\ \frac{\pi}{2} & 0 & cos\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comenzaremos calculando algunas potencias para ver cuál es el resultado o la pauta que debemos sintetizar de forma analítica:

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^4\left(\frac{\pi}{2}\right) = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot R^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Observamos que sólo existen cuatro posibles matrices resultado al calcular una potencia de la matriz $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Además estos resultados se van repitiendo de forma cíclica con periodicidad 4. Esto puede expresarse matemáticamente como:

$$R^n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} & si\ n=4k-3\\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix} & si\ n=4k-2\\ \begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & si\ n=4k-1\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & si\ n=4k\end{cases}$$

siendo k un número natural.

PROBLEMA 4: **Resuelve** la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2\cdot(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

La manera más rápida y sencilla de resolver este ejercicio consiste en aplicar las propiedades de los determinantes para calcular el determinante propuesto en este caso:

$$\begin{vmatrix} 2\cdot(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot(x-1)\cdot(x+1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & (x-1)\cdot(x+1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 2\cdot(x+1) & x+1 & x+1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ x-1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{C1'=C1-C3 \\ C2'=C2-C3}}{=} (x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)^2$$

Así pues, la solución a la ecuación propuesta será:

$$x\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$