# ACTIVIDADES DE REPASO:
# BLOQUE DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

**Problema 1**: Considérense los puntos $A = (1,2,1)$ y $B = (-1,1,0)$. Determina, en cada caso, la ecuación del objeto geométrico requerido:

a) Ecuación general del plano que pasa por el punto A y es paralelo al plano $x-2y+5z-1=0$

b) Ecuación general del plano que contiene a la recta $\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y+5z=-2 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{4}$

c) Ecuación paramétrica del plano que es perpendicular al eje Z y pasa por el punto de corte de las rectas $x-1=y-2=\dfrac{z-1}{2}$ y $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$

d) Ecuación de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto A y es paralela a la recta $x-1=\dfrac{y}{2}=2-z$

e) Ecuación continua de la recta que pasa por el punto B y es paralela a los planos $x-2y+5z-1=0$ y $2x+3y-z+2=0$

SOLUCIÓN:

a) Queremos determinar la ecuación de un plano. Por tanto necesitaremos **un punto y dos vectores directores** o bien, **un punto y un vector normal** al plano. En este caso se observa que la opción más rápida consiste en construir el plano a partir de un punto y un vector normal. Dado que el plano a calcular es paralelo al plano $x-2y+5z-1=0$ concluimos que ambos tendrán el mismo vector normal (obsérvese la figura 1 adjunta). Así pues la ecuación general del plano que buscamos será de la forma:

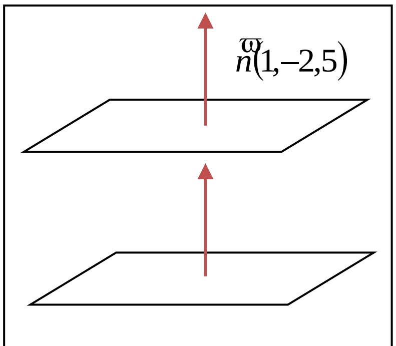

Figura 1

$$x-2y+5z+D=0$$

Para calcular el valor del término independiente D, lo que haremos será forzar al plano a pasar por el punto A (1,2,1) indicado. Para ello simplemente hemos de sustituir las coordenadas de dicho punto en la ecuación del plano:

$$1-2\cdot 2+5\cdot 1+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=-2$$

Por tanto, la ecuación del plano buscado es:

$$\boxed{x-2y+5z-2=0}$$

b) En esta ocasión, para determinar la ecuación del plano, es más sencillo utilizar un **punto y dos vectores directores**. De la primera recta nos interesa extraer un punto (por el que tendrá que pasar el plano deseado) y un vector director. Así pues dispondremos la ecuación de la recta en su forma paramétrica. Para ello resolveremos el sistema compatible indeterminado que constituyen las ecuaciones proporcionadas utilizando un parámetro real $\lambda$:

$$\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y+5z=-2 \end{cases} \overset{z=\lambda}{\Rightarrow} \begin{cases} x-2y=\lambda \\ 2x+y=-2-5\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+4y=-2\lambda \\ 2x+y=-2-5\lambda \end{cases}$$

$$5y=-2-7\lambda$$

Como $y=\frac{-2}{5}-\frac{7}{5}\lambda \quad \Rightarrow \quad x=\lambda+2\left(\frac{-2}{5}-\frac{7}{5}\lambda\right)=-\frac{4}{5}-\frac{9}{5}\lambda$

Por tanto la ecuación paramétrica de la primera recta (la que debe contener el plano) será:

$$\begin{cases} x=-\frac{4}{5}-\frac{9}{5}\lambda \\ y=\frac{-2}{5}-\frac{7}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda\in\Re$$

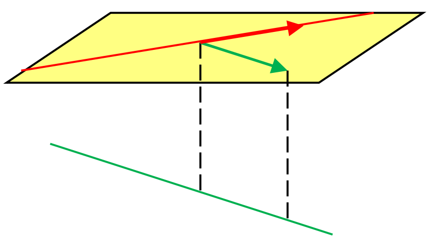

Figura 2

Esto nos lleva a concluir que un punto y un vector director de la recta serán:

$$P\left(-\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0\right) \qquad \vec{u}\left(-\frac{9}{5},-\frac{7}{5},1\right)$$

Este punto y vector serán también punto y vector director del plano (ver figura 2). Dado que se trata de obtener la ecuación de un plano (y no queremos calcular distancias ni propiedades métricas) podemos considerar un vector paralelo al extraído que sea más manejable, sin fracciones:

$$\vec{u}\left(-\frac{9}{5},-\frac{7}{5},1\right)\equiv\vec{u}(-9,-7,5)$$

Para poder escribir la ecuación del plano ya sólo nos queda obtener un vector director más, pero resulta que el vector director de la segunda recta dada es también director del plano por ser paralelo a la misma. Así pues:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+8}{4} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(2,-1,4)$$

Ya podemos escribir la ecuación general del plano haciendo uso de un determinante:

$$\begin{vmatrix} x+\frac{4}{5} & y+\frac{2}{5} & z \\ -9 & -7 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -23\left(x+\frac{4}{5}\right)+46\left(y+\frac{2}{5}\right)+23z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(x+\frac{4}{5}\right)+2\left(y+\frac{2}{5}\right)+z=0 \Rightarrow -x-\frac{4}{5}+2y+\frac{4}{5}+z=0 \Rightarrow \boxed{-x+2y+z=0}$$

c) En primer lugar calcularemos el punto de intersección de las dos rectas dadas. Para ello simplemente hemos de resolver el sistema generado por ambas ecuaciones. Con la finalidad de no complicar en exceso la resolución de dicho sistema, lo que haremos será disponer una de las rectas en forma paramétrica y a continuación sustituir en la ecuación de la otra recta:

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \quad con\ \lambda\in\Re$$

Sustituyendo en la ecuación de la otra recta, obtenemos:

$$x-1=y-2=\frac{z-1}{2} \Rightarrow (3-2\lambda)-1=(3-\lambda)-2=\frac{(-1+2\lambda)-1}{2} \Rightarrow$$
$$2-2\lambda=1-\lambda=-1+\lambda \Rightarrow 1-\lambda=-1+\lambda \Rightarrow \lambda=1$$

Sustituimos ahora el valor de $\lambda=1$ en la ecuación paramétrica y obtenemos el punto:

$$\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \quad con\ \lambda\in\Re \Rightarrow \begin{cases} x=3-2\cdot 1=1 \\ y=3-1=2 \\ z=-1+2\cdot 1=1 \end{cases} \Rightarrow P(1,2,1)$$

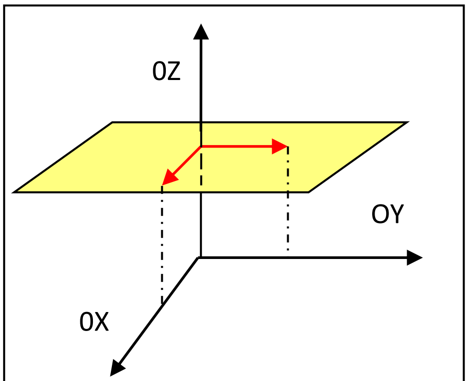

Figura 3

Una vez disponemos del punto de intersección de ambas rectas, sólo queda determinar un vector normal al plano o dos vectores directores. En este caso, resulta sencillo realizar cualquiera de las dos opciones. Dado que nos piden la ecuación paramétrica del plano, será más cómodo determinar dos vectores directores. Como el plano es perpendicular al eje OZ y sabemos que dos de sus vectores directores son $\vec{i}(1,0,0)$ y $\vec{j}(0,1,0)$ (ver figura 3):

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \mu \quad con\ \lambda,\ \mu \in \Re \\ z = 1 \end{cases}}$$

d) Dado que la recta que nos piden es paralela a:

$$x - 1 = \frac{y}{2} = 2 - z$$

Ambas tendrán el mismo vector director:

$$x - 1 = \frac{y}{2} = 2 - z \quad \Rightarrow \quad x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}(1,2,-1)$$

Así pues, sabiendo que pasa por el punto A (1,2,1), la ecuación continua de la recta será:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Para ponerla como intersección de dos planos simplemente hemos de considerar por separado dos de las igualdades de la ecuación continua:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} \\ \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = y - 2 \\ -y + 2 = 2z - 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}}$$

e) En este caso, ya tenemos el punto por donde ha de pasar la recta cuya ecuación queremos obtener. Sólo necesitaremos un vector director. Para ello basta observar que el vector director de la recta es perpendicular a los vectores normales de los dos planos a los que la recta es paralela (ver figura 4). Así pues, multiplicando vectorialmente los vectores normales de los dos planos obtendremos el director de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 5z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_1(1,-2,5) \\ 2x + 3y - z + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_2(2,3,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-13,11,7)$$

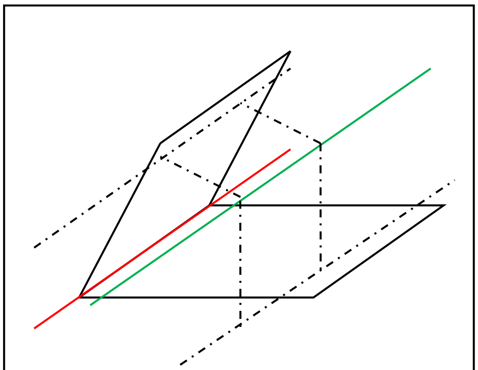

Figura 4

Así pues, la ecuación continua de la recta buscada es:

$$\boxed{\frac{x+1}{-13} = \frac{y-1}{11} = \frac{z}{7}}$$

**Problema 2**: Determina la **posición relativa** la siguiente recta y plano en función del parámetro real *a*:

$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{a} \qquad\qquad \pi \equiv x - y - z = 2$$

A continuación, suponiendo que *a* = 1 contesta a las siguientes preguntas de forma razonada:
a) Expresa el plano $\pi$ en su **ecuación paramétrica**
b) Determina un vector **ortonormal** a la recta r.
c) Determina A, el punto de **intersección** entre el plano $\pi$ y la recta r.
d) Escribe la **ecuación general** del plano $\pi'$ que pasa por A y es perpendicular a *r*
e) Determina B, el **punto simétrico** de B'=(1,1,0) con respecto a la recta r
f) Escribe como intersección de dos planos la recta s que pasa por los puntos A y B
g) Calcula la **distancia** de B al plano $\pi$
h) Escribe la ecuación de la recta que pasa por B y se **apoya** en las rectas r y *r*' siendo:

$$r' : x = y = z$$

i) Determina el **volumen del tetraedro** formado por O, A, B y B'

SOLUCIÓN:

Primeramente razonaremos la posición relativa de la recta y el plano en función del parámetro real a. La posición de ambos objetos en el espacio puede ser determinada fácilmente a partir de la relación entre el vector director de la recta y el normal del plano (ver figura 5).

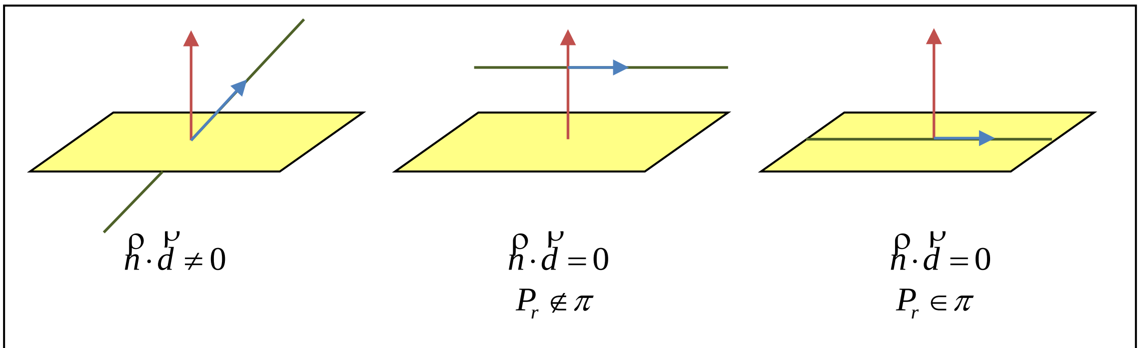


Figura 5

Extraemos un punto y un vector de la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{a} \quad \Rightarrow \quad P_r(1,0,1) \quad \vec{d}(4,a,a)$$

Extraemos un vector normal del plano:

$$\pi \equiv x - y - z = 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}(1,-1,-1)$$

En función del producto escalar de ambos vectores ya podemos discernir alguna posición relativa:

$$\vec{n} \cdot \vec{d} = (1,-1,-1) \cdot (4, a, a) = 4 - 2a \quad \Rightarrow \quad 4 - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

***Caso I:*** $a \neq 2$

En este caso, dado que para un valor de a distinto de dos el producto escalar del normal y el director de la recta no será cero, podemos concluir que **la recta y el plano serán secantes**.

***Caso II:*** $a = 2$

En este caso, podría ocurrir que la recta y el plano fueran paralelos o bien que la recta estuviera contenida en el plano. Para diferenciar las dos situaciones lo que haremos será tomar un punto de la recta y comprobar si está en el plano:

$$P_r(1,0,1) \quad \Rightarrow \quad 1 - 0 - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 \quad \#$$

Concluimos por tanto que **la recta y el plano** no tienen ningún punto en común, por lo que finalmente podemos asegurar que **son paralelos**.

a) Nos piden expresar el plano en su ecuación paramétrica. Para ello simplemente resolveremos el sistema de ecuaciones con dos grados de libertad que disponemos:

$$\pi \equiv x - y - z = 2 \quad \overset{\substack{y=\lambda \\ z=\mu}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\pi : \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad con\ \lambda, \mu \in \Re}$$

b) Dado que a=1, un vector director de la recta será:

$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}(4,1,1)$$

Primeramente buscaremos un vector $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ que sea ortogonal al director de la recta (de los infinitos que existen). Deberá cumplir que:

$$\vec{u} \cdot \vec{d} = 0 \quad \Rightarrow (u_1, u_2, u_3) \cdot (4,1,1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

Tres valores que verifican dicha ecuación serían, por ejemplo:

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = -1$$

Así pues, el vector $\vec{u}(0,1,-1)$ es **ortogonal** al vector director de la recta. Para que sea ortonormal sólo falta hacerlo **unitario**. Para ello dividiremos cada coordenada entre su módulo:

$$|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)}$$

c) Para obtener el punto de intersección entre la recta y el plano simplemente hemos de resolver el sistema generado por ambos objetos matemáticos. Para mayor comodidad, pasaremos la recta a paramétrica y sustituiremos en la ecuación general del plano:

$$r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \quad \Rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in \Re$$

Sustituimos en el plano y despejamos el valor del parámetro:

$$\pi \equiv x - y - z = 2 \quad \Rightarrow \quad 1+4\lambda-\lambda-(1+\lambda)=2 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

Por tanto, el punto de intersección será:

$$\begin{cases} x = 1+4\cdot 1 = 5 \\ y = 1 \\ z = 1+1 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A(5,1,2)}$$

d) El vector director de la recta coincide con el vector normal del plano que deseamos calcular (ver figura 6), así pues:

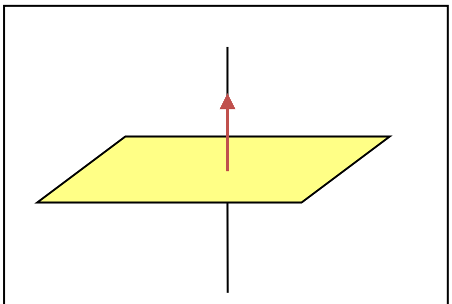

Figura 6

$$4x + y + z + D = 0$$

Sustituyendo en la ecuación el punto A:

$$A(5,1,2) \quad \Rightarrow \quad 4\cdot 5 + 1 + 2 + D = 0$$
$$\Rightarrow \quad D = -23$$

Finalmente la ecuación general del plano buscado es:

$$\boxed{\pi' : 4x + y + z - 23 = 0}$$

e) Primeramente, calcularemos el plano perpendicular a la recta que pasa por B' (de forma análoga a como lo hicimos en el apartado inmediatamente anterior):

$$4x + y + z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\cdot 1 + 1 + 0 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -5 \quad \Rightarrow \quad 4x + y + z - 5 = 0$$

Ahora determinamos la intersección entre este plano y la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in \Re \quad \Rightarrow \quad 4\cdot(1+4\lambda)+\lambda+1+\lambda-5=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$$

El punto de intersección será: $M(1,0,1)$

Este punto de intersección es precisamente el punto medio del segmento que une B' con su simétrico (ver figura 7), por tanto:

$$\frac{B+B'}{2}=M \quad \Rightarrow \quad B=2M-B' \quad \Rightarrow \quad B=(2,0,2)-(1,1,0)=(1,-1,2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=(1,-1,2)}$$

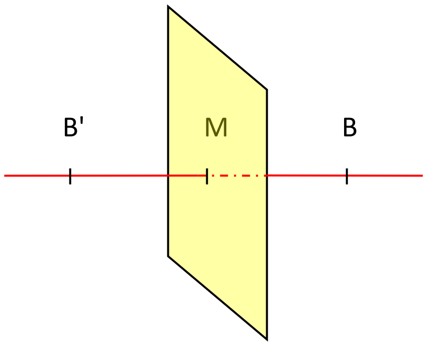

Figura 7

f) Primeramente hemos de escribir la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos A y B utilizando para ello el vector $\vec{AB}=B-A=(1,-1,2)-(5,1,2)=(-4,-2,0)$ o uno paralelo como por ejemplo: $(2,1,0)$

$$s: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{0}$$

Ahora la expresamos como las ecuaciones generales de dos planos:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}\\[2mm] \dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x-1=2y+2\\ 0=z-2\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l}x-2y-3=0\\ z-2=0\end{array}\right\}}$$

g) En este caso, aplicaremos directamente la expresión estudiada en clase para obtener la distancia de un punto a un plano:

$$d(B,\pi)=\frac{|1-(-1)-2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}\,u}$$

h) La recta que nos piden la expresaremos como intersección de dos planos (ver figura 8). Un plano $\alpha$ que contiene a la recta r y pasa por B; y un plano $\beta$ que contiene a r' y pasa también por B. Calculemos sus ecuaciones:

<u>Plano $\alpha$ : Contiene a r y pasa por B</u>

$$r \equiv \frac{x-1}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1} \quad \Rightarrow \quad P_r(1,0,1) \quad \vec{d}(4,1,1) \quad \vec{P_rB}=(0,-1,1)$$

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(x-1)-4y-4(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x-2y-2z+1=0$$

<u>Plano $\beta$ : Contiene a r' y pasa por B</u>

$$r' : x = y = z \quad \Rightarrow \quad Q(0,0,0) \quad \vec{d}_{r'}(1,1,1) \quad \vec{QB} = (1,-1,2)$$

$$\beta : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - y - 2z = 0$$

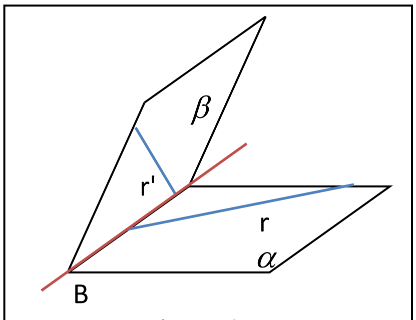


Figura 8

Así pues, la recta que buscamos será el resultado de intersectar los dos planos calculados:

$$\boxed{\begin{cases} x-2y-2z+1=0 \\ 3x-y-2z \quad\;\; =0 \end{cases}}$$

i) El volumen del tetraedro lo proporcionará la sexta parte del volumen del paralelepípedo generado por estos puntos:

$$V = \frac{1}{6}\left| \left[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OB'}\right] \right| = \frac{1}{6}\left| \det\left(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OB'}\right) \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} = (5,1,2) \\ \vec{OB} = (1,-1,2) \\ \vec{OB'} = (1,1,0) \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

Por tanto: $$V = \frac{1}{6}\left| \det\left(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OB'}\right) \right| = \boxed{\frac{4}{6} u^3}$$

**Problema 3**: Determina la **posición relativa** de las rectas siguientes en función del parámetro real $a$ :

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{a}=\frac{1-z}{2} \qquad s:(x,y,z)=(0,-1,1)+\lambda\cdot(-2,a,2)$$

siendo $\lambda\in\Re$ . A continuación, suponiendo que $a$ = 1 contesta a las siguientes preguntas de forma razonada:
a) Determina la ecuación de la **perpendicular común** a las rectas r y s.
b) Calcula la **distancia** entre las rectas r y s.
c) Determina el **ángulo** que forman las rectas r y s.
d) Dado el punto A(4,3,1) , determina las coordenadas de su **proyección** sobre la recta r.
e) Halla la ecuación de un plano que **dista** 7 unidades del punto A y es **perpendicular** a la recta s. ¿Cuántos planos hay que cumplen dicha condición?

SOLUCION:

Primeramente, razonaremos la posición relativa de ambas rectas en función del parámetro real **a** del cual depende.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{a}=\frac{z-1}{-2} \Rightarrow P_r(1,3,1) \quad \vec{d}_r(2,a,-2)$$
$$s:(x,y,z)=(0,-1,1)+\lambda\cdot(-2,a,2) \Rightarrow P_s(0,-1,1) \quad \vec{d}_s(-2,a,2)$$

Veamos cuando los vectores son paralelos:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{d}_r(2,a,-2)\\ \vec{d}_s(-2,a,2)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{-2}=\frac{a}{a}=\frac{-2}{2} \Rightarrow \frac{2}{-2}=\frac{a}{a} \Rightarrow 2a=-2a \Rightarrow a=0$$

<u>Caso I: $a\neq 0$</u>

En este caso, los vectores directores no son paralelos y las rectas se cortarán o se cruzarán. Para diferenciar ambas posiciones lo que haremos será construir un vector que una un punto de r con otro de s y comprobar si dicho vector es coplanario con los dos directores:

$$P_rP_s=(0,-1,1)-(1,3,1)=(-1,-4,0) \Rightarrow \begin{vmatrix}-1 & -4 & 0\\ 2 & a & -2\\ -2 & a & 2\end{vmatrix}=-2a-16-2a+16=-4a=0$$
$$\Rightarrow -4a=0 \Rightarrow a=0$$

Pero dado que estamos dentro de un caso en el que a es distinto de cero, podemos concluir que el determinante calculado tampoco puede ser cero y por tanto los vectores no son coplanarios. En conclusión, <u>**las rectas se cruzan**</u>.

Caso II: $a=0$

En este caso, los vectores directores son paralelos y las rectas pueden ser paralelas o coincidentes. Para diferenciar estas posiciones simplemente debemos extraer un punto de una recta y comprobar si pertenece también a la otra.

$$¿P_r(1,3,1)\in s? \quad \Rightarrow \quad \frac{0-1}{2}=\frac{-1-3}{0}=\frac{1-1}{2} \quad \Rightarrow \textit{No es cierto} \quad \Rightarrow \quad P_r(1,3,1)\notin s$$

En consecuencia, **las rectas son paralelas**.

Consideramos ahora el valor de $a=1$ y responderemos a los distintos apartados propuestos:

a) Para obtener la ecuación de la perpendicular común hemos de calcular la ecuación de dos planos. El plano $\alpha$ que contiene a r y a la perpendicular común; y el plano $\beta$ que contiene a s y a la perpendicular común. La intersección de ambos planos proporcionará la recta perpendicular común a r y s (ver figura 9)
Antes que nada, necesitaremos calcular el vector director de la perpendicular común, pero esto se consigue fácilmente mediante el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas:

$$\vec{u}=\vec{d}_r\times\vec{d}_s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=(4,0,4) \quad \Rightarrow \quad \textit{un vector paralelo sería } (1,0,1)$$

Plano que contiene a r y a la perpendicular común:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-2} \quad \Rightarrow \quad P_r(1,3,1) \quad \vec{d}_r(2,1,-2)$$

$$\alpha:\begin{vmatrix}x-1 & y-3 & z-1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad -x+4y+z-12=0$$

Plano que contiene a s y a la perpendicular común:

$$s:(x,y,z)=(0,-1,1)+\lambda\cdot(-2,1,2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}P_s(0,-1,1)\\ \vec{d}_s(-2,1,2)\end{cases}$$

$$\beta:\begin{vmatrix}x & y+1 & z-1\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad -x-4y+z-5=0$$

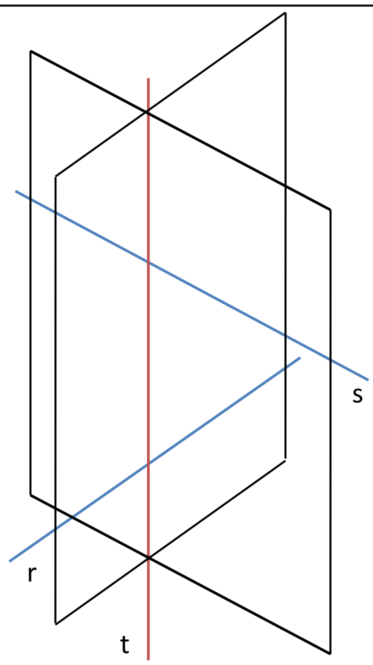

Figura 9

Así pues, la perpendicular común a r y s será:

$$\boxed{t \equiv \begin{cases} -x+4y+z-12=0 \\ -x-4y+z-5=0 \end{cases}}$$

b) Para el cálculo de la distancia entre ambas rectas podemos utilizar cualquiera de los métodos o técnicas estudiados en clase (constructivo, vector genérico o fórmula). En este caso utilizaremos la fórmula deducida a partir del volumen de un paralelepípedo:

$$d(r,s)=\frac{\left|\det\left(\vec{d}_r,\vec{d}_s,\vec{P_rP_s}\right)\right|}{\left|\vec{d}_r\times\vec{d}_s\right|}=\frac{|-4|}{|(4,0,4)|}=\frac{4}{\sqrt{32}}=\boxed{\frac{\sqrt{32}}{8}\,u}$$

c) El coseno del ángulo formado por ambas rectas vendrá dado por:

$$\cos\gamma=\frac{\left|\vec{d}_r\cdot\vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_r\right|\cdot\left|\vec{d}_s\right|}=\frac{7}{9}\quad\Rightarrow\quad\gamma=\arccos\left(\frac{7}{9}\right)=\boxed{38.94^o}$$

d) Realizaremos este problema utilizando vectores genéricos. Construimos un vector que una el punto A(4,3,1) con cualquier punto de la recta r.

$$r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\vec{AP_g}=(1+2\lambda,3+\lambda,1-2\lambda)-(4,3,1)=(2\lambda-3,\lambda,-2\lambda)$$

El vector que une A con su proyección sobre r forma un ángulo recto con el director de la recta (ver figura 10). Así pues:

$$\vec{AP_g}\cdot\vec{d}_r=(2\lambda-3,\lambda,-2\lambda)\cdot(2,1,-2)=0\quad\Rightarrow\quad 9\lambda-6=0\quad\Rightarrow\quad\lambda=\frac{2}{3}$$

Por tanto, sustituyendo el valor de lambda obtenemos el punto proyección de A sobre la recta:

$$r:\begin{cases} x=1+2\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{3} \\ y=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3} \\ z=1-2\cdot\frac{2}{3}=\frac{-1}{3} \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\boxed{A'=\left(\frac{7}{3},\frac{11}{3},-\frac{1}{3}\right)}$$

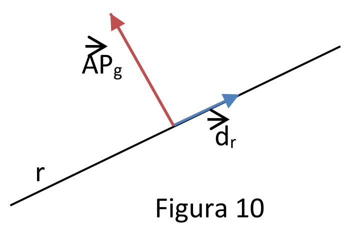

Figura 10

e) El plano que buscamos es perpendicular a la recta s, por lo tanto sabemos que su ecuación general tendrá la forma siguiente:

$$s:(x,y,z)=(0,-1,1)+\lambda\cdot(-2,a,2)\quad\Rightarrow\quad\vec{d}_s(-2,1,2)$$

$$\pi \equiv -2x + y + 2z + D = 0$$

Como queremos que la distancia del punto A a dicho plano sea de 7 unidades:

$$d(A,\pi) = \frac{|-2\cdot 4 + 3 + 2\cdot 1 + D|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|D-3|}{3} = 7$$

Ya simplemente resta encontrar la solución a la ecuación obtenida:

$$\frac{|D-3|}{3} = 7 \quad \Rightarrow \quad |D-3| = 21 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D-3 = 21 & \Rightarrow \quad D = 24 \\ D-3 = -21 & \Rightarrow \quad D = -18 \end{cases}$$

Por tanto, existen dos planos que cumplen las condiciones indicadas en el enunciado (ver figura 11):

$$\boxed{\begin{array}{l} \pi_1 \equiv -2x + y + 2z + 24 = 0 \\ \pi_2 \equiv -2x + y + 2z - 18 = 0 \end{array}}$$

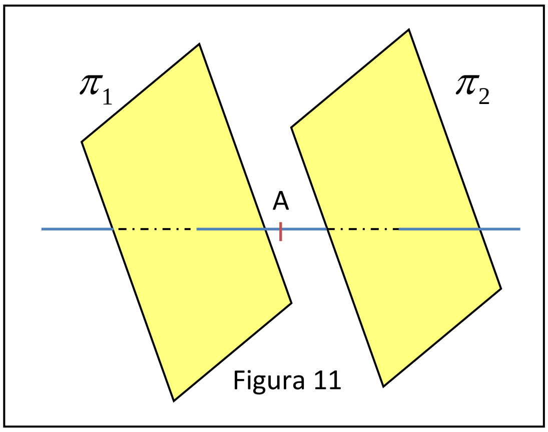

Figura 11

**<u>Problema 4</u>**: Determina la **posición relativa** de los tres planos siguientes en función del parámetro real *a* :

$$\pi_1 \equiv ax + 2y - z = 2a \qquad \pi_2 \equiv x + ay = 2a + 1 \qquad \pi_3 \equiv ax - 2y + z = -2$$

A continuación, suponiendo que *a* = 1 contesta a las siguientes preguntas de forma razonada:

a) Expresa el plano $\pi_3$ en su **ecuación paramétrica**

b) Determina un vector **ortonormal** al plano $\pi_1$

c) Determina A, el punto de **intersección** de los tres planos.

d) Escribe la **ecuación continua** de la recta r que pasa por A y es perpendicular a $\pi_3$

e) Determina B, el **punto simétrico** de B'=(-2,-2,-2) respecto al plano $\pi_1$

f) Escribe como intersección de dos planos la recta s que pasa por los puntos A y B

g) Calcula la recta que resulta de **proyectar** r sobre el plano $\pi_2$

h) Calcula el **ángulo** que forman las rectas r y s

i) Determina el **área del triángulo** OAB

*SOLUCION*:

Primeramente razonaremos la posición relativa de los tres planos en función del parámetro real **a**. En realidad se trata simplemente de discutir un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv ax + 2y - z = 2a \\ \pi_2 \equiv x + ay = 2a + 1 \\ \pi_3 \equiv ax - 2y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 2a \\ 1 & a & 0 & 2a+1 \\ a & -2 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Determinaremos el valor de a que nos permitirá discutir el sistema:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

Caso I: $a \neq 0$

En este caso, el rango de la matriz de coeficientes es 3 y coincide con el rango de la matriz del sistema y el número de incógnitas. Así pues, estamos ante un sistema compatible determinado. Esto se traduce geométricamente en una **posición de triedro**, es decir, los tres planos dados **<u>se cortan en un único punto</u>** (ver figura 12).

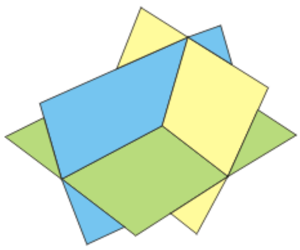

Figura 12

Caso II: $a=0$

En este caso particular, estudiaremos la posición relativa de los planos de dos en dos. Así pues se observa que (ver figura 13):

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv 2y - z = 0 \\ \pi_2 \equiv x = 1 \\ \pi_3 \equiv -2y + z = -2 \end{cases}$$

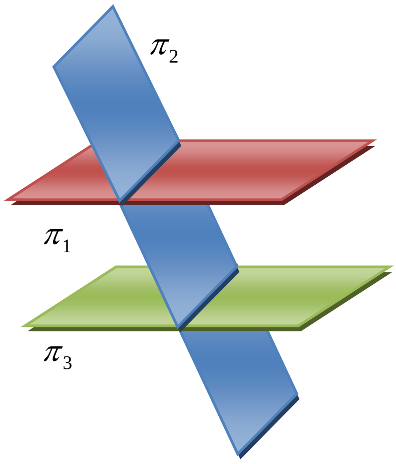

Figura 13

Se observa, por simple comparación de las ecuaciones que:

- $\pi_1$ y $\pi_3$ son paralelos (pues tienen vectores normales proporcionales y diferente término independiente)
- $\pi_1$ y $\pi_2$ son secantes (pues son vectores normales no son proporcionales)
- $\pi_2$ y $\pi_3$ son secantes (pues son vectores normales no son proporcionales)

Una vez discutida la posición relativa según los valores de a, consideramos el valor de $a=1$ y responderemos a los distintos apartados propuestos:

a) Para expresar $\pi_3$ en su forma paramétrica simplemente hemos de resolver el sistema de una ecuación con dos parámetros de libertad:

$$\pi_3 \equiv x - 2y + z = -2 \quad \overset{\substack{y=\lambda \\ z=\mu}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\pi_3 \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad con\ \lambda, \mu \in \Re}$$

b) El vector normal del plano $\pi_1 \equiv x + 2y - z = 2$ es $\vec{n}_1(1,2,-1)$. Sólo faltaría hacerlo unitario para que fuera ortonormal:

c)

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{6}\right)}$$

d) Para hallar el punto de intersección de los tres planos debemos resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de dichos planos:

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x + 2y - z = 2 \\ \pi_2 \equiv x + y \qquad = 3 \\ \pi_3 \equiv x - 2y + z = -2 \end{cases} \quad \overset{F3'=F3+F1}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + y \qquad = 3 \\ 2x \qquad\quad = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 4 \\ y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

Por tanto, el punto de corte de los tres planos es: $\boxed{A(0,3,4)}$

e) Al ser perpendicular a $\pi_3$ su vector director será $\vec{d}_r = \vec{n}_3 = (1,-2,1)$. Así pues, la ecuación continua de la recta pedida será:

$$\boxed{r : \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{1}}$$

f) Resolveremos el problema mediante un proceso constructivo (ver figura 14).
Paso 1: Determinamos la ecuación paramétrica de la recta perpendicular al plano $\pi_1$ que pasa por B'.

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \quad con\ \lambda \in \Re \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

Paso 2: Calculamos el punto M de intersección de dicha recta con el plano $\pi_1$

$$\pi_1 \equiv x + 2y - z = 2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2 + \lambda + 2(-2 + 2\lambda) - (-2 - \lambda) = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \lambda = 1$$

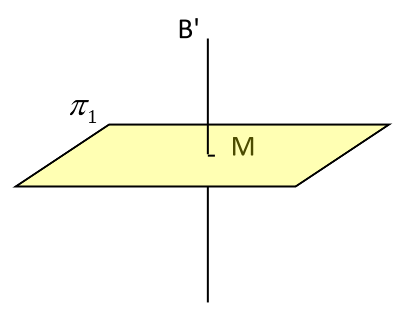

Figura 14

Sustituimos el valor de lambda en la ecuación de la recta para obtener el punto M:

$$\begin{cases} x = -2 + 1 = -1 \\ y = -2 + 2 \cdot 1 = 0 \\ z = -2 - 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \quad M(-1,0,-3)$$

Paso 3: El punto M resulta ser el punto medio entre B' y su simétrico B. Así pues:

$$\frac{B + B'}{2} = M \quad \Rightarrow \quad B = 2M - B' = (-2,0,-6) - (-2,-2,-2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = (0,2,-4)}$$

g) Necesitaremos el vector director de la recta s, que será precisamente el vector $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = (0,2,-4) - (0,3,4) = (0,-1,-8)$$

Así pues, la ecuación continua de s será:

$$s:\frac{x}{0}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{-8}$$

Y expresándola como intersección de dos planos sería:

$$s:\begin{cases}\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2}{-1}\\ \dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{-8}\end{cases}\Rightarrow \boxed{s:\begin{cases}x=0\\ -8y+z+20=0\end{cases}}$$

h) La recta que resulta de **proyectar** r sobre el plano $\pi_2$ la calcularemos como intersección de dos planos: el propio plano $\pi_2$ y el plano $\alpha$ contiene a r siendo perpendicular a $\pi_2$ (ver figura 15). La ecuación de este último plano vendrá dada por:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_2\equiv x+y=3 \;\Rightarrow\; \vec{n}_2(1,1,0)\\ r:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-4}{1}\;\Rightarrow\; P_r(0,3,4)\;\; \vec{d}_r(1,-2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \alpha\equiv\begin{vmatrix}x & y-3 & z-4\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\equiv x-y+3-3z+12=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \alpha\equiv x-y-3z+15=0$$

Así pues, la proyección de la recta r será:

$$\boxed{r':\begin{cases}\pi_2\equiv x+y=3\\ \alpha\equiv x-y-3z+15=0\end{cases}}$$

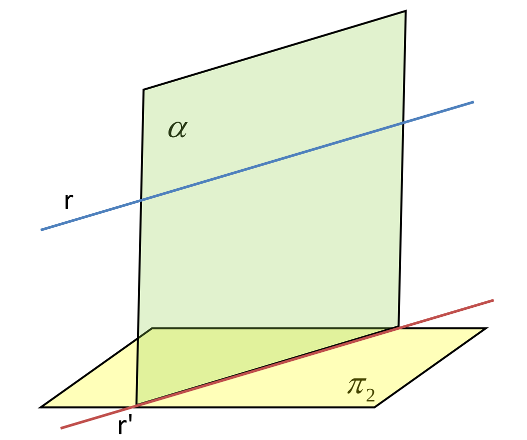

Figura 15

i) Para calcular el ángulo entre las rectas r y s necesitamos simplemente sus respectivos vectores directores:

$$\left.\begin{array}{l}r:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-4}{1}\;\Rightarrow\;\vec{d}_r(1,-2,1)\\ s:\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{-8}\;\Rightarrow\;\vec{d}_s(0,-1,-8)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\gamma=\frac{\left|\vec{d}_r\cdot\vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_r\right|\cdot\left|\vec{d}_s\right|}=\frac{6}{\sqrt{210}}\;\Rightarrow\;\boxed{\gamma=65.54^{o}}$$

j) Para calcular el área del triángulo OAB recurriremos al producto vectorial de los vectores $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{OA}=(0,3,4)\\ \vec{OB}=(0,2,-4)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{OA}\times\vec{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 2 & -4\end{vmatrix}=(-20,0,0)$$

El módulo del vector nos proporciona el área del paralelogramo generado por dichos vectores (ver figura 16). Así pues, el área del triángulo pedido será la mitad de dicho valor:

$$\left|\vec{OA}\times\vec{OB}\right|=20 \quad \Rightarrow$$

$$Area_{\Delta}=\frac{\left|\vec{OA}\times\vec{OB}\right|}{2}=\frac{20}{2}=\boxed{10\ u}$$

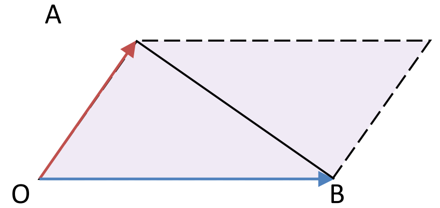

Figura 16