1

BLOQUE DE ÁLGEBRA

MATRICES

Pedro A. Martínez Ortiz
IES María Blasco

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Concepto de matriz

Una **matriz** no es más que un conjunto de elementos dispuestos en filas y columnas. En este tema nos centraremos en las matrices cuyos elementos son números reales.

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

Diagonal secundaria

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

Fila

Columna

Dimensión

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Concepto de submatriz

Una **submatriz** es una matriz que se obtiene de otra matriz más grande al **seleccionar algunas** de sus filas y columnas. En otras palabras, es una matriz más pequeña contenida dentro de una matriz original.

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Filas 3 y 4
Columnas 3 y 4

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Filas 2, 3 y 4
Columnas 1, 3 y 4

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Filas 1 y 2
Columnas 2, 3 y 4

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Filas 1 y 3
Columnas 2 y 3

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Algunos tipos de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ COLUMNA

Formada por una única columna

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRIZ FILA

Formada por una única fila

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRIZ RECTANGULAR

Matriz con diferente número de filas que de columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ CUADRADA

Matriz con el mismo número de filas que de columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ SIMÉTRICA

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

Su diagonal principal será nula

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Algunos tipos de matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ NULA

Matriz cuyos elementos son todos nulos

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

Cuadrada con ceros fuera de la diagonal principal

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ESCALAR

Matriz diagonal con sus elementos diagonales iguales

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD

Matriz escalar con unos en la diagonal principal

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TRIANGULAR SUPERIOR

Matriz cuadrada con ceros por debajo de la diagonal principal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

TRIANGULAR INFERIOR

Matriz cuadrada con ceros por encima de la diagonal principal

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Suma y resta de matrices

¿Cuándo?

Cuando las matrices sean de la **misma dimensión**

¿Cómo se suman/restan dos matrices?

Se operan los elementos de las matrices que ocupan la misma posición. El resultado es otra matriz con la misma dimensión que los sumandos.

Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Propiedades de la suma de matrices

Otros ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

No puede realizase. No tienen la misma dimensión.

PROPIEDADES

Considerando las matrices A, B y C todas ellas de dimensión n x m y denotando por 0 a la matriz nula del mismo orden, se cumple:

Conmutativa: $A + B = B + A$

Elemento neutro: $A + 0 = A$

Elemento simétrico: $A + (-A) = 0$

Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Multiplicación por un escalar

¿Cuándo?

Siempre puede realizarse el producto de un escalar por una matriz.

¿Cómo se multiplica una matriz por un escalar?

Simplemente se multiplica cada elemento de la matriz por el escalar.

Veamos algún ejemplo:

$$4\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ -1 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Multiplicación de matrices

¿Cuándo podemos multiplicar dos matrices?

Cuando el número de columnas de la 1ª matriz coincida con el número de filas de la 2ª matriz.

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$2 \times 2 \qquad 3 \times 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

$$2 \times 4 \qquad 4 \times 3$$

Sí se pueden multiplicar en este orden. El resultado será una matriz de dimensión 2 x 3

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Multiplicación de matrices

¿**Cómo** se multiplican dos matrices?

Matemáticamente: $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \begin{matrix} \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, p\} \end{matrix}$$

Veamos un ejemplo para entenderlo mejor:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & \cdot & 1 \\ -1 & \cdot & 2 \\ 2 & \cdot & -2 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{matrix} \xRightarrow{Sumamos} -5$$

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Multiplicación de matrices

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 7 & \square\\ \square & \square & \square\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr}1 & \cdot & 0 & & 0\\ -1 & \cdot & 1 & = & -1\\ 2 & \cdot & 4 & & 8\end{array}\ \xRightarrow{Sumamos}\ 7$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 7 & 2\\ \square & \square & \square\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr}1 & \cdot & 1 & & 1\\ -1 & \cdot & -3 & = & 3\\ 2 & \cdot & -1 & & -2\end{array}\ \xRightarrow{Sumamos}\ 2$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 7 & 2\\ 4 & \square & \square\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr}0 & \cdot & 1 & & 0\\ 3 & \cdot & 2 & = & 6\\ 1 & \cdot & -2 & & -2\end{array}\ \xRightarrow{Sumamos}\ 4$$

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Multiplicación de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 4 & 7 & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \xRightarrow{Sumamos} 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 4 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot -3 \\ 1 \cdot -1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ -9 \\ -1 \end{matrix} \xRightarrow{Sumamos} -10$$

Así pues, finalmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 4 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

ATENCIÓN

Puedes comprobar con calculadora tus resultados. **En PAU debes indicar como se opera** (todo debe estar justificado)

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Propiedades de la multiplicación

Propiedad 1: No es conmutativa

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Propiedad 2: Es asociativa

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Propiedad 3: Distributiva respecto a la suma
(pero teniendo en cuenta la no conmutatividad)

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

ATENCIÓN

Recuerda que

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Propiedad 4: Tiene elemento neutro
(la matriz identidad del orden correspondiente)

$$A_{n\times m} \cdot I_{m\times m} = I_{n\times n} \cdot A_{n\times m} = A_{n\times m}$$

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Propiedades de la multiplicación

ATENCIÓN

¡No olvides las propiedades y sus consecuencias!

Consecuencia 1: Si $A \cdot B = 0$ no implica que $A = 0$ o $B = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consecuencia 2: Si $A \cdot B = A \cdot C$ no implica que $B = C$

Consecuencia 3: Las identidades notables cambian

$$\cancel{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Inversa de una matriz

No existe la división entre dos matrices. Para compensar la multiplicación de matrices cuadradas, surge el concepto de **matriz inversa**.

$$3x = 1 \qquad 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \qquad AX = I$$

Dadas dos matrices cuadradas A y A^{-1} se dice que una es **inversa** de la otra si:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Puedes comprobar que las siguientes matrices son inversas una de la otra:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ATENCIÓN

Ya nos ocuparemos de calcular inversas más adelante.

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Trasposición de matrices

¿Cuándo?

Siempre puede realizarse la trasposicón de una matriz.

¿Cómo se calcula la traspuesta de una matriz?

La traspuesta de una matriz es una nueva matriz donde se han intercambiado filas por columnas.

Veamos algún **ejemplo**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \\ 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 5 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 5 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 5 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

OBSERVA:

- Una matriz A es **simétrica** si:
  $$A = A^T$$
- Una matriz A es **antisimétrica** si:
  $$A = -A^T$$

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Propiedades de la trasposición matricial

Propiedad 1: $(A^T)^T = A$

Propiedad 2: $(A+B)^T = A^T + B^T$

Propiedad 3: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Propiedad 4: $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$

Propiedad 5: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Veamos un **ejemplo** que ilustre la **propiedad 3**:

$$(A\cdot B)^T = \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 5 \\ 7 & -8 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -5 & -8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -5 & -8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{A^T \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Observa la importancia del orden de las matrices

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

¿Por qué nacen las matrices?

- La **resolución de sistemas** de ecuaciones (en astronomía, economía, ingeniería...) junto con la necesidad facilitar el trabajo en problemas con una enorme cantidad de datos proyectaron el nacimiento y desarrollo de la teoría matricial y el álgebra lineal.

- En el 200 a.C. ya se usaron **tablas numéricas** (proto-matrices) en algunos textos chinos como "*Los nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*" para resolver sistemas.

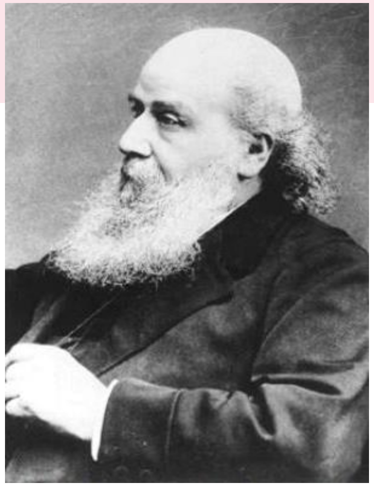
Extracto de "Los Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático"

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Nacimiento de la teoría matricial

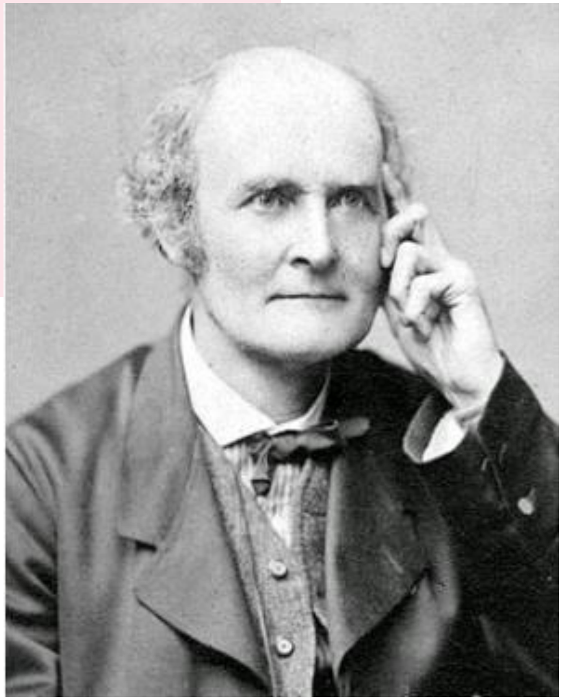
Siglo XIX

- **Sylvester** es la primera persona en introducir el término "matriz"
- **Cayley** definió la suma y multiplicación de matrices y mostró que su uso podía llegar más allá de la resolución de sistemas.
- **Frobënius** desarrolló el álgebra matricial.



James Joseph Sylvester

F. G. Frobënius

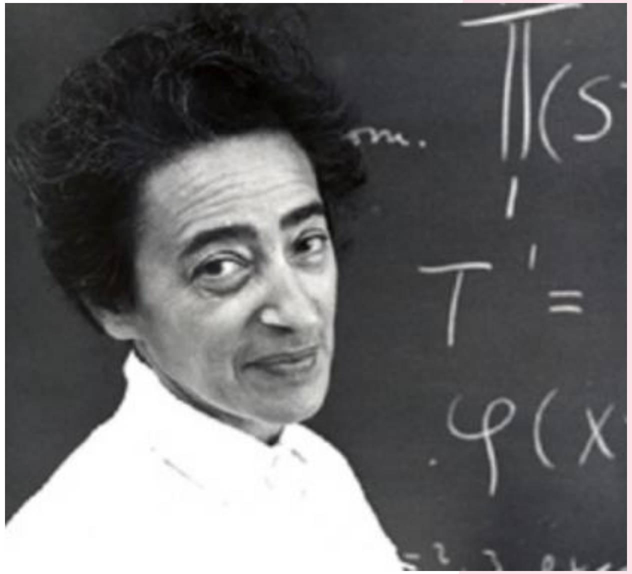


Arthur Cayley

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Avances y aplicaciones

Siglo XX



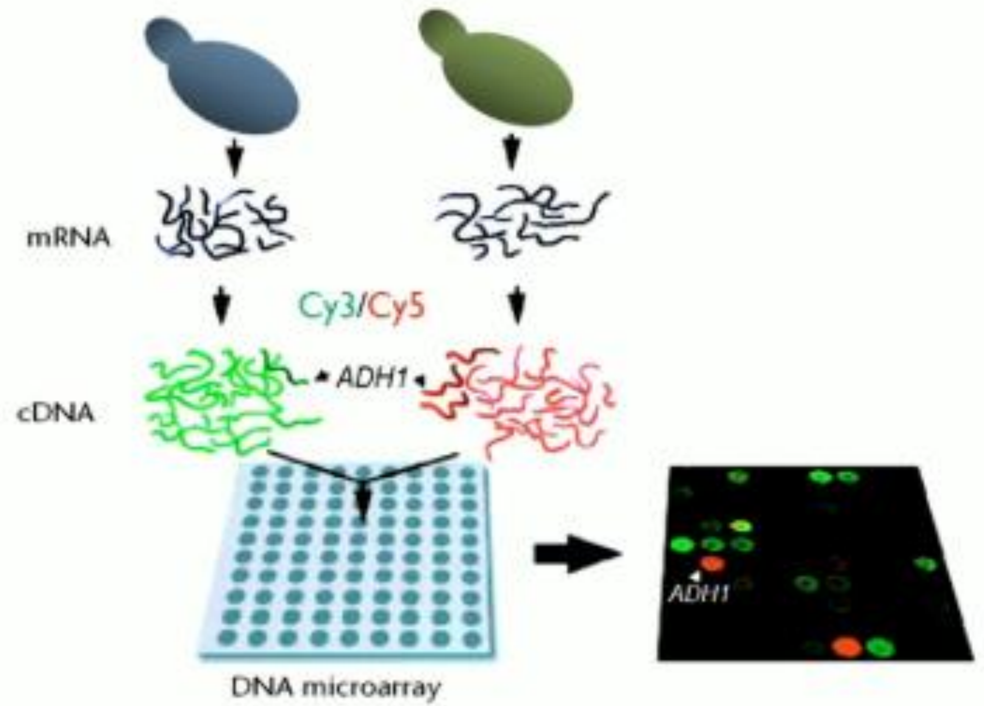
Olga Taussky-Todd

- **Florence Nightingale** aplica el pensamiento matricial para analizar datos médicos.
- **Olga Taussky-Todd** trabajó con matrices en el contexto de la mecánica cuántica y sistemas dinámicos.
- Comienzan a aplicarse para representar y trabajar con **grafos**.
- 2019: **Karen Uhlenbeck** 1ª mujer en recibir el Premio Abel por su trabajo en ecuaciones diferenciales parciales (para el cual empleó matrices y álgebra lineal de forma esencial)

Karen Uhlenbeck

Pedro A. Martínez Ortiz
@maths4everything
IES María Blasco

Más aplicaciones de las matrices



- Recuperación de **imágenes** y datos.
- Agilizar procesos de **cálculo computacionales**.
- Optimizar sistemas de **transporte** y energéticos.
- **Diagnóstico** médico.
- **Análisis genético**.
- **Predicción** de fenómenos (económicos, científicos, meteorológicos, epidémicos, etc.)
- Ingeniería de **tejidos** (especialmente en el óseo)
- Creación se sistemas estructurales estables en **arquitectura**.
- Análisis de **órbitas** estables.
- Análisis de datos (**DataBase**)
- Estructuración y alimentación de la **IA**.
- Creación de **videojuegos** y realidad virtual.