PROBLEMA 1: **Discute** el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro real m.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ z+my=0 \\ x+(1+m)y+mz=m+1 \end{array}\right\}$$

Discutiremos el sistema **utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius**. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ z+my=0 \\ x+(1+m)y+mz=m+1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{array}\right) = A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes, A. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real m:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = (m^2+1)-(m+1) = m^2-m$$

Averigüemos qué valores del parámetro m, anulan este determinante:

$$|A| = m^2 - m = m\cdot(m-1) = 0 \Rightarrow \quad m=0 \text{ ó } m=1$$

Esto nos permite **distinguir tres casos posibles**:

CASO I: $m \neq 0 \ y \ m \neq 1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{array}\right)$	En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas: $R(A) = R(A) = nº\ incógnitas = 3$ motivo por el cual, el sistema es **<u>COMPATIBLE DETERMINADO</u>**.

CASO II: $m = 0$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$	En este caso, se observa que el rango de la matriz A es 2: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Además, el rango de la matriz ampliada se observa que también es 2 porque cualquier menor de orden 3 que consideremos tiene determinante nulo. Por tanto: $R(A) = R(A^*) = 2 \neq nº incógnitas = 3$ En consecuencia, el sistema es **<u>COMPATIBLE INDETERMINADO</u>**

CASO III: $m = 1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$	En este caso, dado que el determinante de la matriz de coeficientes es cero, el rango de A no puede ser 3. No obstante, el rango es 2 ya que existe un menor de orden 2 con determinante no nulo: $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ Por otro lado, la matriz ampliada es de rango tres ya que: $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ Así pues, el sistema en este caso es **INCOMPATIBLE** porque: $$2 = R(A) \neq R(A^*) = 3$$

PROBLEMA 2: **Discute** el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro real a.

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z+t=0\\ ax-2y+z+4t=0\\ 3x-y-z+4t=0\\ -2x+4y-z+9t=0 \end{aligned}\right\}$$

Discutiremos el sistema **utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius**. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z+t=0\\ ax-2y+z+4t=0\\ 3x-y-z+4t=0\\ -2x+4y-z+9t=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ a & -2 & 1 & 4 & 0\\ 3 & -1 & -1 & 4 & 0\\ -2 & 4 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right) = A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes, A. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real a:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1\\ a & -2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & -1 & 4\\ -2 & 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F3' = F3+F2\\ F4' = F4+F1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1\\ a & -2 & 1 & 4\\ 5 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 5 & 0 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 4\\ 5 & 0 & 10 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ a & -2 & 1\\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot 45 - 5\cdot(5a-10) = -25a+275$$

Averigüemos qué valores del parámetro a, anulan este determinante:

$$|A| = -25a+275 = 0 \Rightarrow \quad m = \frac{275}{25} = 11$$

Esto nos permite **distinguir dos casos posibles**:

CASO I: $m \neq 11$	
$\left(\begin{array}{cccc\|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ a & -2 & 1 & 4 & 0\\ 3 & -1 & -1 & 4 & 0\\ -2 & 4 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right)$	En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas: $R(A) = R(A) = n^{o}\ incógnitas = 4$ motivo por el cual, el sistema es <u>**COMPATIBLE DETERMINADO**</u>.

CASO II: $m = 11$	
$\left(\begin{array}{cccc\|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right)$	En este caso, se observa que el rango de la matriz A es 3: $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$ Además, el rango de la matriz ampliada se observa que también es 3 porque cualquier menor de orden 4 que consideremos se forma de añadir una columna de ceros. En consecuencia: $$R(A) = R(A^*) = 3 \neq nº incógnitas = 4$$ Por tanto, el sistema es **<u>COMPATIBLE INDETERMINADO</u>**

PROBLEMA 3: Considera la matriz:

$$A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 1 & x^2+1 \end{pmatrix}$$

Dependiente del parámetro real x y la matriz B de orden 4 que verifica $B^2 = 2I - 3B$ siendo I la matriz identidad orden 4. Se pide:

a) Determinar qué valores del parámetro x hacen **invertible** la matriz $A(x)$
b) **Demostrar** que la matriz B es regular
c) **Encontrar** los valores reales de m y n que verifican $B^{-1} = mB + nI$
d) Para $x = 1$, **calcular** el determinante de la matriz $2A^5 \cdot A^T \cdot A^{-1}$
e) Para $x = 1$, **determinar** la matriz X que verifica $AX = (1 \quad 2 \quad 0)^T$

a) Para que la matriz $A(x)$ sea invertible, su determinante no debe ser cero. Así pues:

$$|A(x)| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix} = -x \cdot (x^2 + 2x + 1) = -x \cdot (x+1)^2$$

Igualamos a cero el determinante:

$$|A(x)| = -x \cdot (x+1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \text{ ó } x = -1$$

Así pues, **la matriz $\boldsymbol{A(x)}$ es invertible para todo valor de $\boldsymbol{x \in R - \{0, -1\}}$**

b) Sabemos que:

$$B^2 = 2I - 3B \quad \rightarrow \quad B^2 + 3B = 2I \quad \rightarrow \quad B \cdot (B + 3I) = 2I \rightarrow \quad B \cdot \left[\frac{1}{2}(B + 3I)\right] = I$$

Dado que hemos encontrado una matriz que al multiplicarla por B se obtiene la matriz identidad, podemos concluir que dicha matriz será la inversa de B:

$$B^{-1} = \frac{1}{2}(B + 3I)$$

Con ello demostramos que **la matriz B es regular**.

c) Utilizando la expresión obtenida en el apartado b) y por comparación de términos, podemos concluir que:

$$B^{-1} = \frac{1}{2}(B + 3I) = \frac{1}{2}B + \frac{3}{2}I \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m = \frac{1}{2}} \quad \boldsymbol{n = \frac{3}{2}}$$

d) Para $x = 1$, sabemos que el determinante de $A(x)$ es:

$$|A(1)| = -1 \cdot (1+1)^2 = -4$$

Usando ahora las propiedades de los determinantes, concluimos que:

$$\left|2A^5 \cdot A^T \cdot A^{-1}\right| = 2^3 \cdot |A|^5 \cdot |A^T| \cdot \frac{1}{|A|} = 8 \cdot |A|^5 \cdot |A| \cdot \frac{1}{|A|} = 8 \cdot (-4)^5 = \boldsymbol{-8192}$$

e) Para $x = 1$, sabemos que la matriz A es regular. Por tanto, podemos hacer uso de su inversa para resolver la ecuación planteada:

$$AX = (1 \quad 2 \quad 0)^T \quad \rightarrow \quad A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (1 \quad 2 \quad 0)^T \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo:

$$A = A(1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos la inversa de A mediante el método de adjuntos:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj^T(A)$$

Dado que ya sabemos el valor de su determinante ($|A| = -4$), calcularemos primeramente la matriz de adjuntos:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Por tanto:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$