DOSSIER SEMANAL 06

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: **Discute y resuelve** el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro real α:

$$\begin{cases} x+\alpha y+z=\alpha+2 \\ x+y+\alpha z=-2(\alpha+1) \\ \alpha x+y+z=\alpha \end{cases}$$

Discutiremos el sistema utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema según los valores del parámetro α.

$$\begin{cases} x+\alpha y+z=\alpha+2 \\ x+y+\alpha z=-2(\alpha+1) \\ \alpha x+y+z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha+2 \\ 1 & 1 & \alpha & -2(\alpha+1) \\ \underbrace{\alpha \quad 1 \quad 1}_{A} & & & \alpha \end{array}\right) = A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real α:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+\alpha^3+1-\alpha-\alpha-\alpha = \alpha^3-3\alpha+2$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro α, anulan este determinante. Es decir:

$$|A| = \alpha^3-3\alpha+2=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1\,(doble) \\ \alpha=-2 \end{cases}$$

Esto nos permite distinguir tres casos posibles:

CASO I: $\alpha \neq 1 \quad y \quad \alpha \neq -2$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha+2 \\ 1 & 1 & \alpha & -2(\alpha+1) \\ \alpha & 1 & 1 & \alpha \end{array}\right)$	En este caso, dado que el determinante de la matriz de coeficientes no es cero, podemos asegurar que el rango de dicha matriz es 3. Así mismo, la matriz ampliada como mucho puede tener rango 3 (al poseer únicamente tres filas) y dado que contiene a la matriz A que es de rango 3, podemos concluir que su rango también es tres. Como conclusión, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius el sistema en este caso quedaría clasificado como <u>**SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**</u> ya que: $R(A) = R(A^*) = 3 = NUM.INCÓGNITAS$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha+2 & \alpha & 1 \\ -2(\alpha+1) & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{\alpha^3+\alpha^2-2\alpha}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha+2)}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & -2(\alpha+1) & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{(\alpha-1) \cdot (\alpha+2)^2}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{\alpha+2}{\alpha-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha+2 \\ 1 & 1 & -2(\alpha+1) \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{-2(\alpha-1) \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha+2)}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{-2 \cdot (\alpha+1)}{\alpha-1}$$

Así pues, la solución del sistema será:

$$(x,y,z)=\left(\frac{\alpha}{\alpha-1},\frac{\alpha+2}{\alpha-1},\frac{-2\cdot(\alpha+1)}{\alpha-1}\right)$$

<table>
<tr><th colspan="2">CASO II: $\alpha=1$</th></tr>
<tr><td>$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&1&1&-4\\1&1&1&1\end{array}\right)$$</td><td>En este caso, sabemos que la matriz de coeficientes no es de rango 3 (ya que, para este valor del parámetro, el determinante de la matriz de coeficientes es cero).

De hecho, dado que todos los menores de orden 2 son nulos (obsérvese que todas las filas de A son idénticas), podemos afirmar que:
$$Rg(A)=1$$
Ahora bien, el rango de la matriz ampliada, en este caso es dos ya que podemos encontrar al menos un menor de orden 2 distinto de cero:
$$\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}=1-3=-2\neq 0 \quad\Rightarrow\quad Rg(A^*)=2$$
Así pues, dado que: $1=R(A)\neq R(A^*)=2$ por el Teorema de Rouchè-Frobënius, podemos afirmar que el sistema es INCOMPATIBLE. En consecuencia, no tiene solución.</td></tr>
</table>

CASO II: $\alpha = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Para discutir este caso concreto, emplearemos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{F2=F2-F1 \\ F3'=F3+2F1}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\overset{F3'=F3+F2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A la vista del resultado, observamos que:

$$R(A) = R(A^*) = 2 < NUM.INCÓGNITAS = 3$$

por el Teorema de Rouchè-Frobënius, podemos afirmar que el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

Vamos a resolver este último caso aprovechando el resultado obtenido por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{F2=F2-F1 \\ F3'=F3+2F1}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right) \overset{F3'=F3+F2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos en el sistema un grado de libertad. Denotando por ejemplo, $z = \lambda$ siendo λ un parámetro real, tendríamos que la solución del sistema sería:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 3y + 3z = 2 \\ y = \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2\lambda - \dfrac{2-3\lambda}{3} \\ z = \dfrac{2-3\lambda}{3} \\ y = \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = \dfrac{9\lambda - 2}{3} \\ y = \lambda \\ z = \dfrac{2-3\lambda}{3} \end{array}\right\} \quad con\ \lambda \in R$$

Resumiendo, el estudio del sistema:

CASO	TIPO DE SISTEMA	SOLUCIÓN
$\alpha \neq 1$ $\alpha \neq -2$	COMPATIBLE DETERMINADO	$(x,y,z)=\left(\frac{\alpha}{\alpha-1},\frac{\alpha+2}{\alpha-1},\frac{-2\cdot(\alpha+1)}{\alpha-1}\right)$
$\alpha = 1$	INCOMPATIBLE	No tiene solución
$\alpha = -2$	COMPATIBLE INDETERMINADO	$(x,y,z)=\left(\frac{9\lambda-2}{3},\lambda,\frac{2-3\lambda}{3}\right)$ $con\ \lambda \in R$

PROBLEMA 2: Se dice que una matriz cuadrada A es **ortogonal** si su inversa coincide con su traspuesta. Dicho de otro modo: A es ortogonal si cumple que $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$ donde I es la matriz identidad.

a) **Demuestra** que la matriz G es ortogonal para cualquier valor del ángulo $\beta \in R$

$$G = \begin{pmatrix} cos\ \beta & 0 & sen\ \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\ \beta & 0 & cos\ \beta \end{pmatrix}$$

b) ¿**Qué valores** puede adoptar el determinante de una matriz ortogonal?

a) Veamos primero que la matriz $R(\beta)$ es ortogonal. Según el enunciado, una matriz es ortogonal cuando su inversa coincide con su traspuesta. Para ello, tenemos la opción de calcular la matriz inversa $R^{-1}(\beta)$ mediante el uso de adjuntos y comprobar que ésta coincide con $R^T(\beta)$, o bien, (que es lo que haremos) comprobar que al multiplicar la matriz $R(\beta)$ por su traspuesta se obtiene la matriz identidad.

$$R(\beta) \cdot R^T(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\beta + \sin^2\beta & 0 & \cos\beta \cdot \sin\beta - \cos\beta \cdot \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\beta \cdot \sin\beta - \cos\beta \cdot \sin\beta & 0 & \cos^2\beta + \sin^2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya que sabemos que:

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

sea cual sea el valor del ángulo β.

Así pues, se puede comprobar también fácilmente que ambas matrices conmutan:

$$R^T(\beta)\cdot R(\beta) = R(\beta)\cdot R^T(\beta) = I$$

En consecuencia, concluimos de estas relaciones que la inversa de $R(\beta)$ es $R^T(\beta)$, es decir: $R^{-1}(\beta) = R^T(\beta)$ lo que nos lleva a concluir que la matriz propuesta es ortogonal.

b) Vamos ahora a averiguar qué valores posibles puede adoptar una matriz ortogonal. Para ello bastará con considerar la definición de matriz ortogonal y aplicar las propiedades de los determinantes que conocemos. Sabemos que una matriz ortogonal A es aquella que verifica la relación:

$$A\cdot A^T = I$$

Así pues, aplicando determinantes a ambos miembros de la igualdad, obtenemos que:

$$|A\cdot A^T| = |I|$$

Y aplicando las propiedades de los determinantes observamos que:

$$|A|\cdot|A^T| = |I|$$

$$|A|\cdot|A| = 1$$

$$|A|^2 = 1$$

$$|A| = \sqrt{1} = \pm 1$$

Como conclusión, podemos afirmar que el determinante de una matriz ortogonal siempre será o bien 1, o bien -1.

PROBLEMA 3: Calcula la derivada de las siguientes funciones reales de variable real:

1) $f(x)=\dfrac{3x^3+1}{x^4+1}$ 2) $f(x)=Ln(3x)$ 3) $f(x)=Ln\left(x^3\right)$

4) $f(x)=Ln\left(x^2+1\right)$ 5) $f(x)=Log_3\left(2x^3+5x-7\right)$ 6) $f(x)=Ln\left(\dfrac{2x+5}{x^2-1}\right)$

Para la resolución de esta actividad utilizaremos las reglas de derivación del producto y el cociente de dos funciones, cuyas expresiones vamos a recordar a continuación:

$$h(x)=f(x)\cdot g(x) \quad\Rightarrow\quad h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

También haremos uso de la derivada de una función logarítmica:

$$h(x)=\log_a f(x) \quad \rightarrow h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{Ln\,a}$$

$$h(x)=ln\,f(x) \quad \rightarrow h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

También aplicaremos (en algún momento) las propiedades de los logaritmos para facilitar y acelerar el proceso de cálculo de alguna derivada.

1) Para obtener la derivada de esta función hemos de aplicar la expresión de la derivada de un cociente:

$$f(x)=\frac{3x^3+1}{x^4+1} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{9x^2\cdot(x^4+1)-4x^3\cdot(3x^3+1)}{(x^4+1)^2}$$

$$\rightarrow\ f'(x)=\frac{9x^6-12x^6-4x^3+9x^2}{(x^4+1)^2}$$

2) $f(x) = Ln(3x)$ aplicando directamente la expresión de la derivada:

$$f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

3) En este caso si aplicamos las propiedades de los logaritmos previamente:

$$f(x) = Ln(x^3) = 3 \cdot Ln\, x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

4) Aquí no podemos aplicar ninguna propiedad de los logaritmos, por lo que derivaremos directamente la función:

$$f(x) = Ln(x^2 + 1) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

5) Al igual que en el apartado anterior:

$$f(x) = \log_3(2x^3 + 5x - 7) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{6x^2 + 5}{2x^3 + 5x - 7} \cdot \frac{1}{Ln\, 3}$$

6) Aquí, el trabajo es considerablemente menor si antes de derivar aplicamos las propiedades de los logaritmos, ya que terminaremos ahorrando utilizar la expresión para la derivada de un cociente.

$$f(x) = Ln\left(\frac{2x + 5}{x^2 + 1}\right) = Ln\,(2x + 5) - \; Ln\,(x^2 + 1) \rightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{2x + 5} - \frac{2x}{x^2 + 1}$$