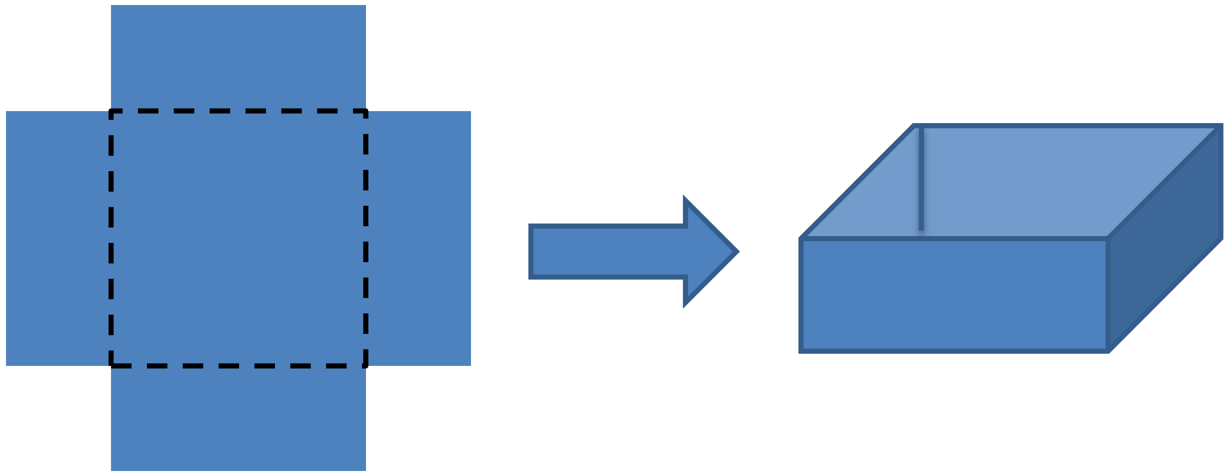
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

POR PEDRO A. MARTÍNEZ ORTIZ

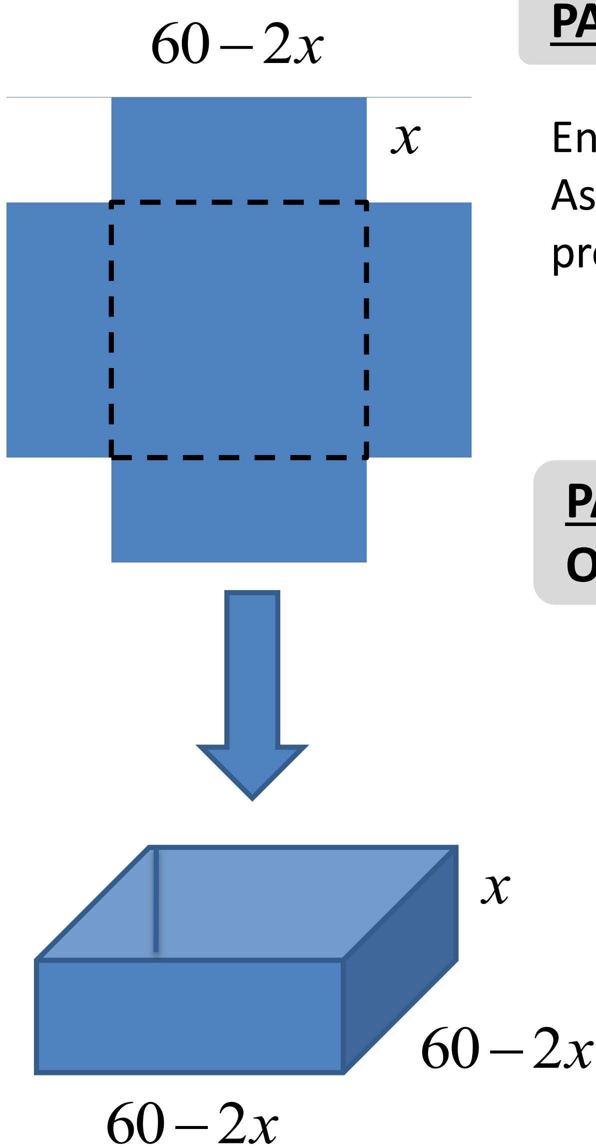
PROBLEMA 1

De una lámina cuadrada de cartón de lado 60 cm. Se debe cortar un cuadrado de lado x, de modo que con el cartón resultante, y doblando convenientemente, se pueda construir una caja sin tapa. Determinar la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse de cada esquina para que la capacidad de la caja sea máxima. Hallar, además, el volumen de la caja resultante.

<u>PASO 1</u>: Realizar una representación gráfica.



PROBLEMA 1



<u>PASO 2</u>: ¿Qué queremos maximizar o minimizar?

En este caso deseamos maximizar el **<u>VOLUMEN</u>** de la caja. Así pues, deberemos obtener una función que nos proporcione el volumen de la caja.

<u>PASO 3</u>: Variables. Construcción de la FUNCIÓN OBJETIVO.

$$x \equiv longitud\ (cm)\ del\ lado\ de\ cada\ cuadradito$$

$$V(x) = x \cdot (60-2x) \cdot (60-2x)$$

$$\boxed{V(x) = x \cdot (60-2x)^2}$$

PROBLEMA 1

PASO 4 Y 5: CONDICIÓN DE LIGADURA Y REDEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN.

No son necesarios en este caso.

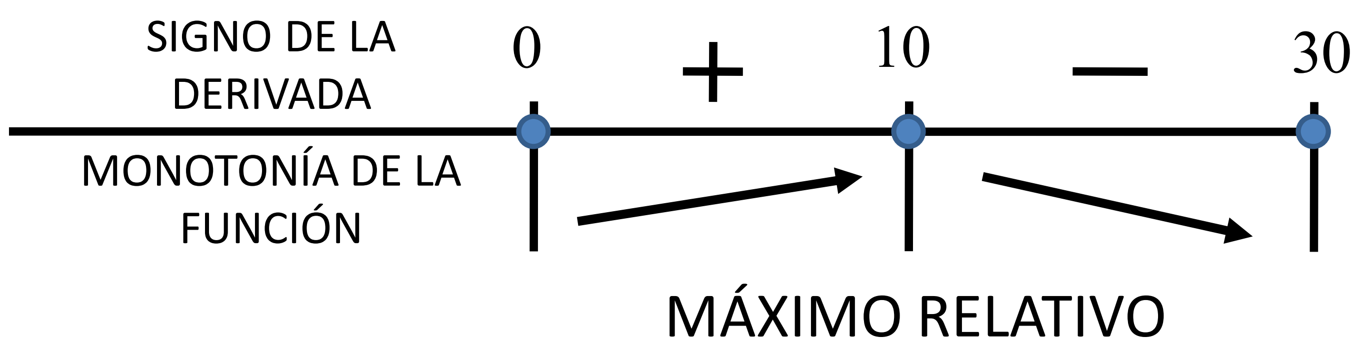
PASO 6: DERIVACIÓN Y OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

$$V(x) = x \cdot (60-2x)^2$$

$$V'(x) = (60-2x)^2 + x \cdot 2 \cdot (60-2x) \cdot (-2) = (60-2x) \cdot (60-2x-4x) =$$

$$= (60-2x) \cdot (60-6x) \Rightarrow (60-2x) \cdot (60-6x) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 30 \\ x = 10 \end{matrix}$$

Comprobemos si alguno de estos puntos críticos se corresponde con el máximo de la función:



PROBLEMA 1

PASO 7: REDACCIÓN DE LA SOLUCIÓN.

El máximo volumen de la caja se alcanza cuando cortamos en cada esquina un cuadrado de 10 cm de lado. El volumen de la caja máximo se corresponderá con:

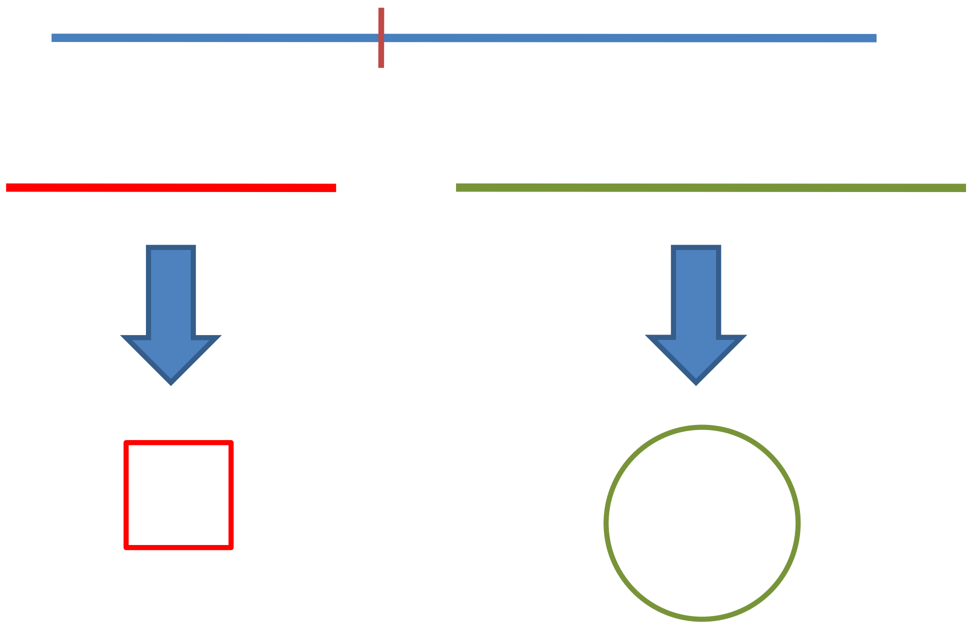
$$V(x) = x \cdot (60 - 2x)^2$$

$$V(10) = 10 \cdot (60 - 20)^2 = 10 \cdot 40^2 = 16000\ cm^3 = 16\ dm^3 = \boxed{16\ l}$$

PROBLEMA 2

Se tiene un alambre de 2 m de longitud y se desea dividir en dos trozos para formar con el primero un cuadrado y con el segundo una circunferencia. Hallar la longitud de cada trozo para que la suma de las áreas se las dos figuras sea mínima.

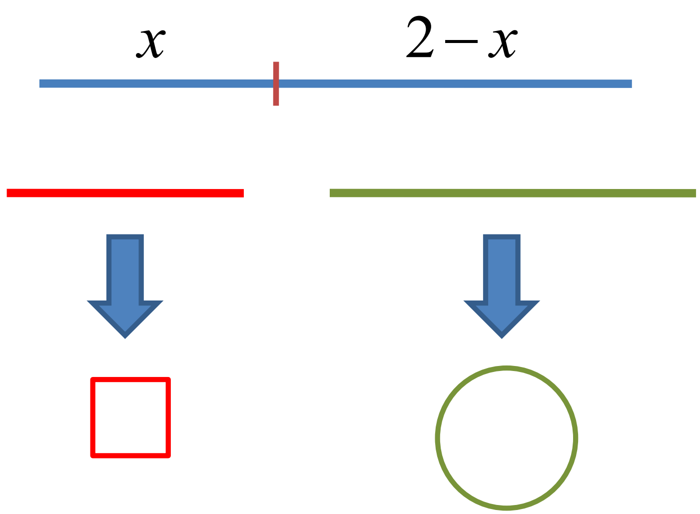
<u>PASO 1</u>: Realizar una representación gráfica.



PROBLEMA 2

<u>PASO 2</u>: ¿Qué queremos maximizar o minimizar?

En este caso deseamos minimizar la **suma de las ÁREAS**. Así pues debemos obtener la función que nos proporcione el área en función del punto donde cortemos el alambre inicial.



$$P = x \qquad P = 2 - x$$

$$4l = x \qquad 2\pi\, r = 2 - x$$

$$l = \frac{x}{4} \qquad r = \frac{2-x}{2\pi}$$

<u>PASO 3</u>: Variables. Construcción de la FUNCIÓN OBJETIVO.

$$x \equiv m \ desde\ el\ lado\ izquiero$$
$$hasta\ el\ corte$$

$$A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{2-x}{2\pi}\right)^2$$

$$\boxed{A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(2-x)^2}{4\pi}}$$

PROBLEMA 2

PASO 4 Y 5: CONDICIÓN DE LIGADURA Y REDEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN.

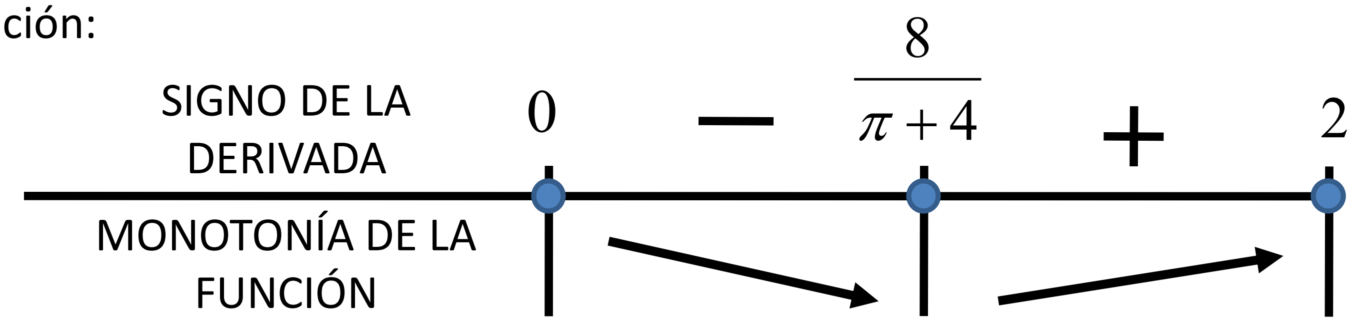
No son necesarios en este caso.

PASO 6: DERIVACIÓN Y OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(2-x)^2}{4\pi} \Rightarrow A'(x) = \frac{2x}{16} - \frac{2(2-x)}{4\pi} \Rightarrow \frac{2x}{16} - \frac{2(2-x)}{4\pi} = 0$$

$$2\pi x - 8(2-x) = 0 \Rightarrow 2\pi x - 16 + 8x = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{2\pi + 8} = \frac{8}{\pi + 4}$$

Comprobemos si alguno de estos puntos críticos se corresponde con el mínimo de la función:

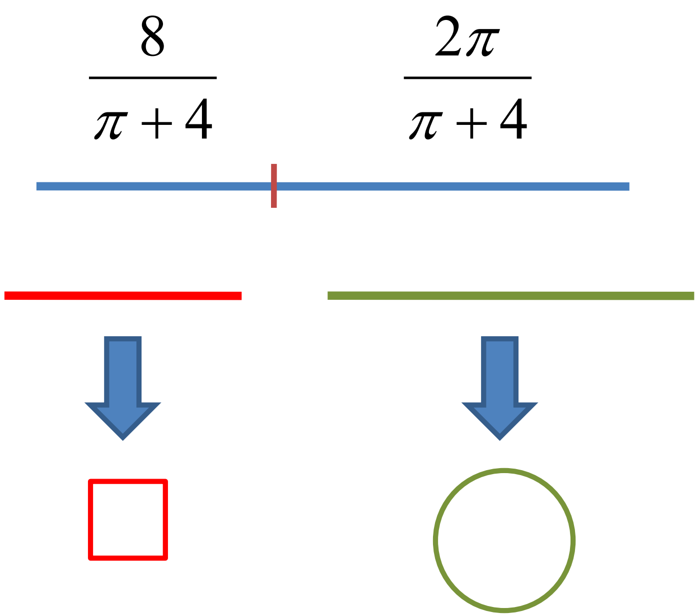


MÍNIMO RELATIVO

PROBLEMA 2

PASO 7: REDACCIÓN DE LA SOLUCIÓN.

El área mínima para la suma de las áreas de las dos figuras se alcanza al cortar el alambre en dos segmentos, uno de los cuales mide:



$$\boxed{\frac{8}{\pi+4} \quad metros}$$

Y el otro medirá:

$$2-\frac{8}{\pi+4}=\frac{2\pi+8-8}{\pi+4}=\frac{2\pi}{\pi+4}$$

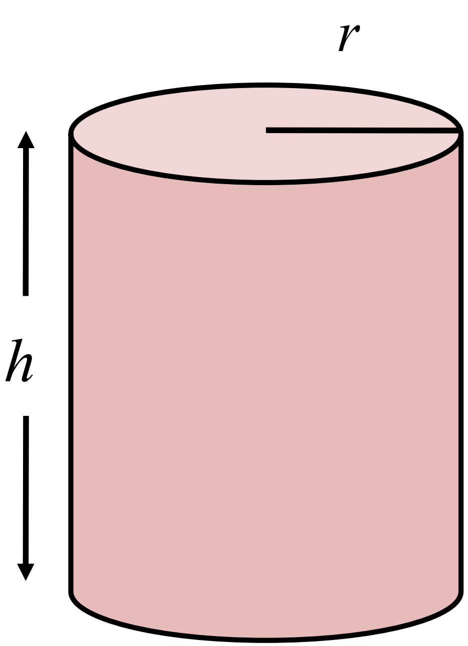
$$=\boxed{\frac{2\pi}{\pi+4} \quad metros}$$

PROBLEMA 3

Un conservero ha de fabricar botes cilíndricos de 1 litro de capacidad para envasar tomate. Determinar las dimensiones que debe tener el bote para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.

<u>PASO 1</u>: Realizar una representación gráfica.

<u>PASO 2</u>: ¿Qué queremos maximizar o minimizar?



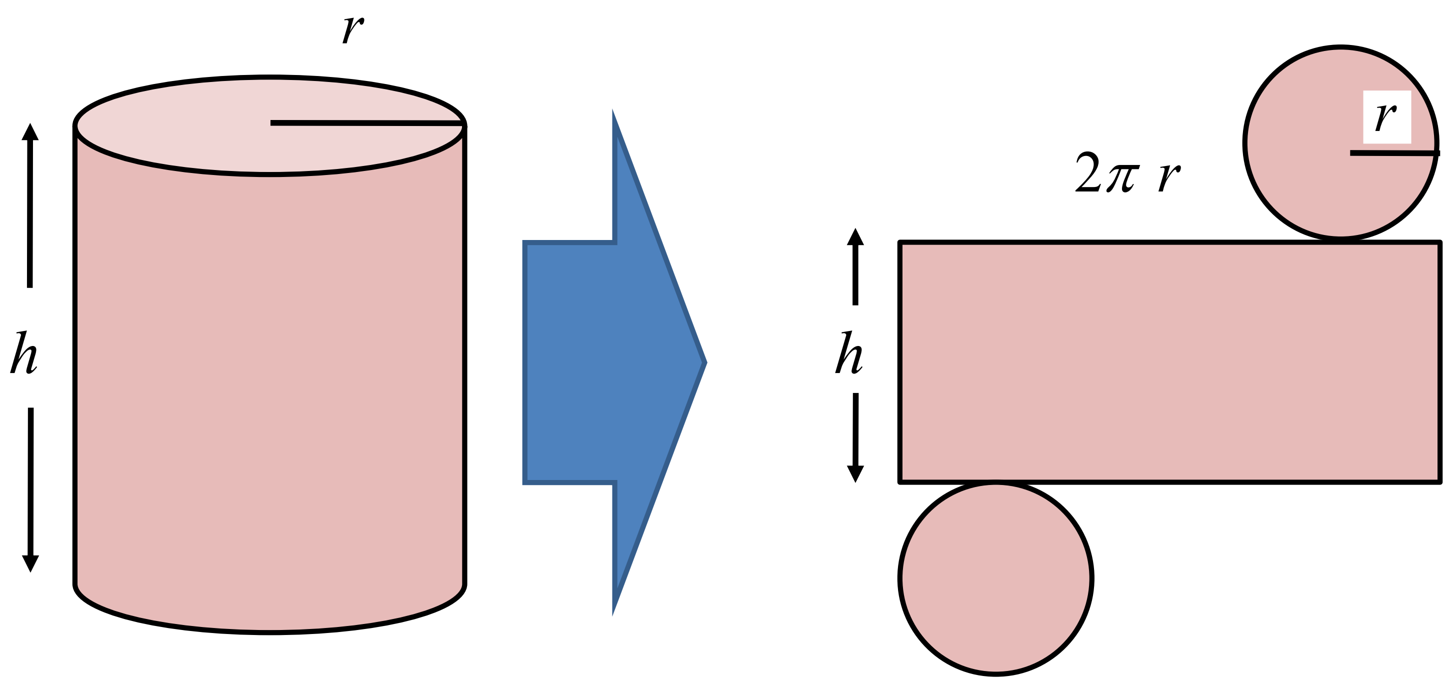
En este caso deseamos minimizar el **ÁREA** del bote para que así nos cueste más barata su fabricación.

<u>PASO 3</u>: Variables. Construcción de la FUNCIÓN OBJETIVO.

$$r \equiv radio\ de\ la\ base\ (en\ dm)$$
$$h \equiv altura\ del\ cilindro\ (en\ dm)$$

PROBLEMA 3

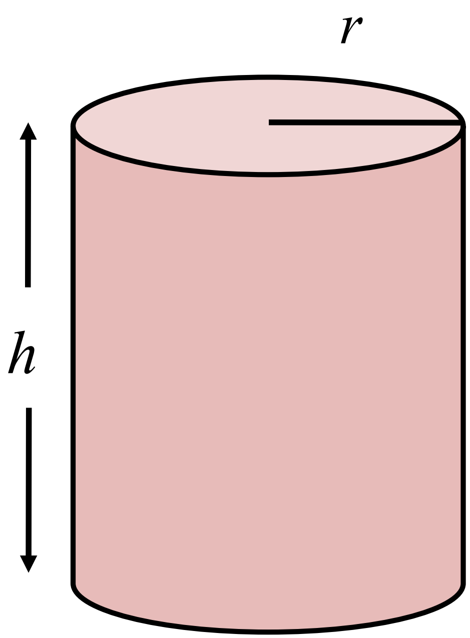
PASO 3: Variables. Construcción de la FUNCIÓN OBJETIVO.



$$A(r,h) = A_{rectangulo} + 2 \cdot A_{circulo}$$

$$A(r,h) = 2\pi\ r\ h + 2\pi\ r^2$$

PROBLEMA 3



PASO 4: CONDICIÓN DE LIGADURA ENTRE VARIABLES

$$V(r,h) = A_{base} \cdot h \quad \Rightarrow \quad V(r,h) = \pi\, r^2 h$$

$$1 = \pi\, r^2 h$$

$$h = \frac{1}{\pi\, r^2}$$

PASO 5: REFORMULAMOS LA FUNCIÓN OBJETIVO

$$A(r,h) = 2\pi\, r\, h + 2\pi\, r^2 \quad \Rightarrow \quad A(r) = 2\pi\, r \frac{1}{\pi\, r^2} + 2\pi\, r^2$$

$$\boxed{A(r) = \frac{2}{r} + 2\pi\, r^2}$$

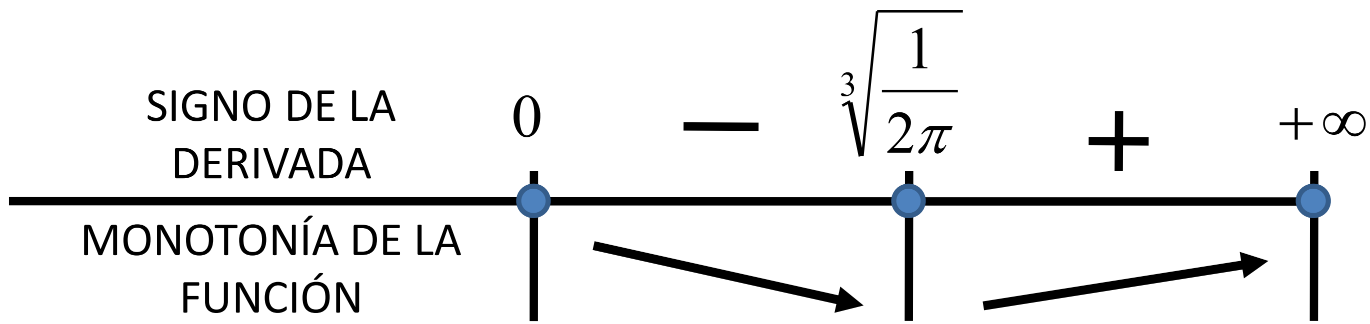
PROBLEMA 3

<u>PASO 6</u>: DERIVACIÓN Y OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

$$A(r)=\frac{2}{r}+2\pi r^2 \Rightarrow A'(r)=-\frac{2}{r^2}+4\pi r \Rightarrow -\frac{2}{r^2}+4\pi r=0$$

$$-2+4\pi r^3=0 \Rightarrow 4\pi r^3=2 \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{2}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

Comprobemos si este punto crítico se corresponde con el mínimo de la función:

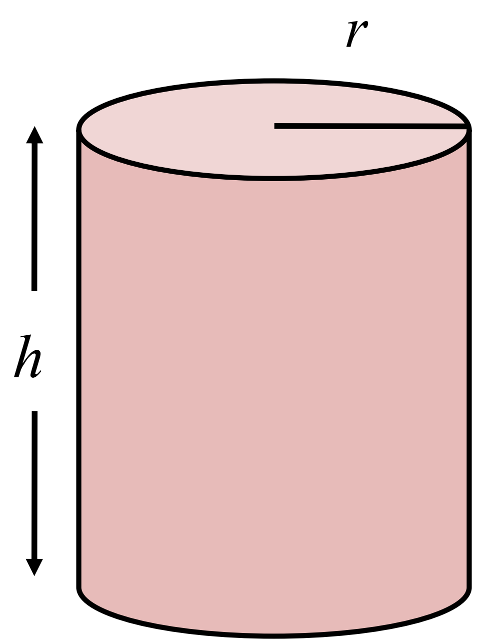


MÍNIMO RELATIVO

PROBLEMA 3

PASO 7: REDACCIÓN DE LA SOLUCIÓN.

Para que el gasto de hojalata sea mínimo, las dimensiones del cilindro deben ser:



$$r = \sqrt[3]{\frac{2}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad dm}$$

$$h = \frac{1}{\pi\, r^2} = \frac{1}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2} = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8}{2\pi}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad dm}$$

PROBLEMA 4

a) Encontrar el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a su curva tiene pendiente máxima.

b) ¿Cuánto vale dicha pendiente máxima?

PASO 1: Realizar una representación gráfica. No es necesario

PASO 2: ¿Qué queremos maximizar o minimizar?

En este caso deseamos maximizar la **PENDIENTE** de la recta tangente a la curva. Así pues, deberemos obtener una función que nos proporcione la pendiente. Y…

PASO 3: Variables. Construcción de la FUNCIÓN OBJETIVO.

¿QUÉ ES AQUELLO QUE NOS PROPORCIONA LA PENDIENTE EN CUALQUIER PUNTO? ⇒ **DERIVADA**

$$y = \frac{1}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{-1} \Rightarrow y' = -1 \cdot \left(1+x^2\right)^{-2} \cdot 2x \Rightarrow \boxed{P(x) = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}}$$

PROBLEMA 4

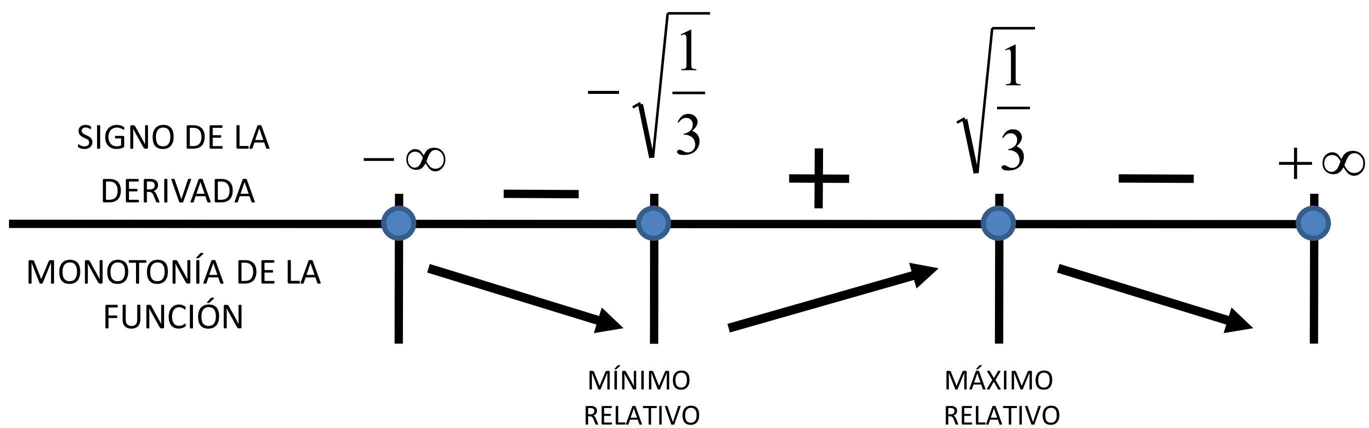
PASO 6: DERIVACIÓN Y OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

$$P(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} \Rightarrow P'(x)=\frac{-2\cdot\left(1+x^2\right)^2-(-2x)\cdot 2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}$$

$$\Rightarrow P'(x)=\frac{\left(1+x^2\right)\cdot\left[-2\cdot\left(1+x^2\right)+8x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^4} \Rightarrow P'(x)=\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}=0$$

$$6x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{6}}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Comprobemos si algún punto crítico se corresponde con el máximo que buscamos:



PROBLEMA 4

PASO 7: REDACCIÓN DE LA SOLUCIÓN.

La pendiente máxima se alcanza en el punto:

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$y = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{3}{4}\right)$$

Y la pendiente máxima en dicho punto valdrá:

$$P\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{-2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}}{\left(1+\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2\right)^2} = -\frac{2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \boxed{-\frac{9}{8\cdot\sqrt{3}}}$$

PROBLEMA 5

Una agencia inmobiliaria tiene alquilados 200 apartamentos en una ciudad a 160€ al mes cada uno. Por cada 5 € que la agencia decide incrementar el precio de alquiler pierde un inquilino que se traslada a otro apartamento más económico. ¿Cuál es el alquiler que produce más beneficio a la agencia?

PASO 1: Realizar una representación gráfica. No es necesario

PASO 2: ¿Qué queremos maximizar o minimizar?

En este caso deseamos maximizar el **BENEFICIO** de la agencia que dependerá del número de aumentos que se realicen en el precio del alquiler.

PASO 3: VARIABLES. CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN OBJETIVO.

SUBIDAS	APARTAMENTOS ALQUILADOS	PRECIO DEL ALQUILER (€)	BENEFICIO (€)
0	200	160	$200 \cdot 160$
1	$200-1$	$160+5$	$(200-1)\cdot(160+5)$
2	$200-2$	$160+5\cdot 2$	$(200-2)\cdot(160+5\cdot 2)$
3	$200-3$	$160+5\cdot 3$	$(200-3)\cdot(160+5\cdot 3)$
x	$200-x$	$160+5x$	$(200-x)\cdot(160+5x)$

$$\boxed{B(x)=(200-x)\cdot(160+5x)}$$

PROBLEMA 5

PASO 4 Y 5: CONDICIÓN DE LIGADURA Y REDEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN.

No son necesarios en este caso.

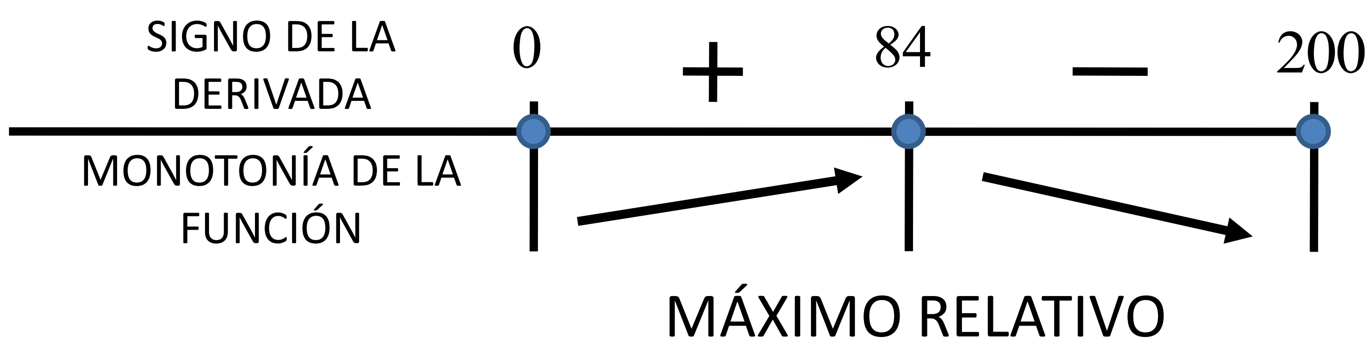
PASO 6: DERIVACIÓN Y OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

$$B(x) = (200 - x) \cdot (160 + 5x)$$

$$B'(x) = -(160 + 5x) + 5 \cdot (200 - x) = -160 - 5x + 1000 - 5x =$$

$$= -10x + 840 \Rightarrow -10x + 840 = 0 \Rightarrow x = 84$$

Comprobemos si alguno de estos puntos críticos se corresponde con el máximo de la función:



PROBLEMA 5

<u>PASO 7</u>: REDACCIÓN DE LA SOLUCIÓN.

El propietario alcanzará el máximo beneficio posible si realiza 84 subidas de precio. Es decir, debe fijar el **<u>precio del alquiler</u>** en:

$$160+5\cdot 84=160+420=\boxed{580\ €}$$

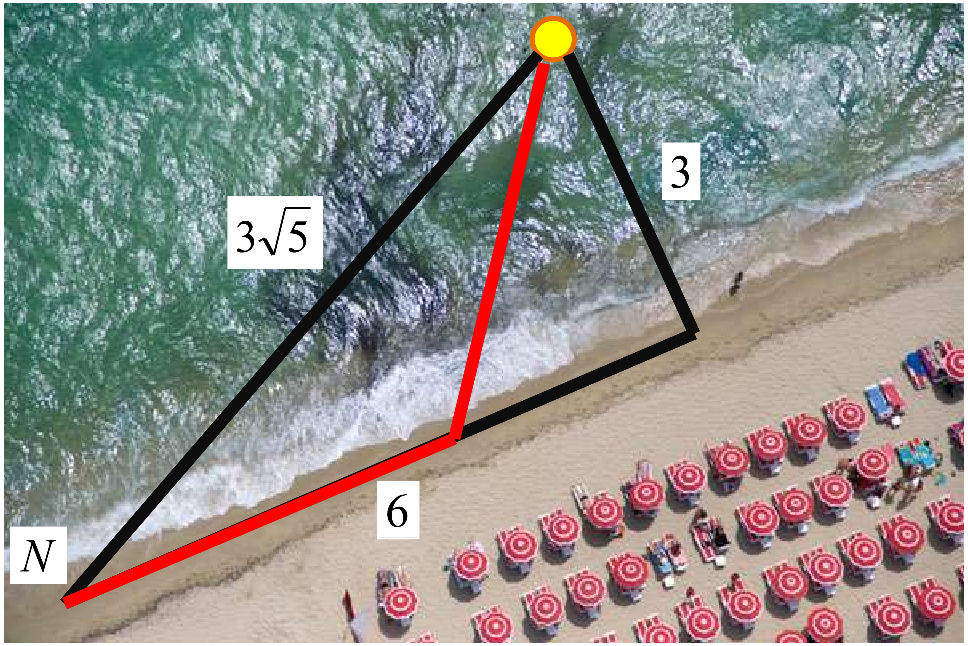
En este caso, llegará a alquilar 200 – 84 = 116 pisos y el beneficio que se llevará el propietario será:

$$B(84)=(200-84)(160+5\cdot 84)=116\cdot 580=67280\ €$$

PROBLEMA 6

Desde un punto N de la orilla del mar, un nadador debe alcanzar una boya que flota a 3 km de la costa y dista $3\sqrt{5}$ km del punto N. Si recorriendo la orilla su velocidad media es de 5 km/h, y a nado es de 3 km/h, ¿cuánto tiempo debe caminar el nadador hasta lanzarse al mar para alcanzar la boya en el menor tiempo posible?

<u>PASO 1</u>: Realizar una representación gráfica.



Hay algo que ya podemos saber y es la máxima distancia que puede recorrer antes de lanzarse al mar.

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 + c^2$$

$$45 = 9 + c^2$$

$$c = \sqrt{36}$$

$$c = 6$$

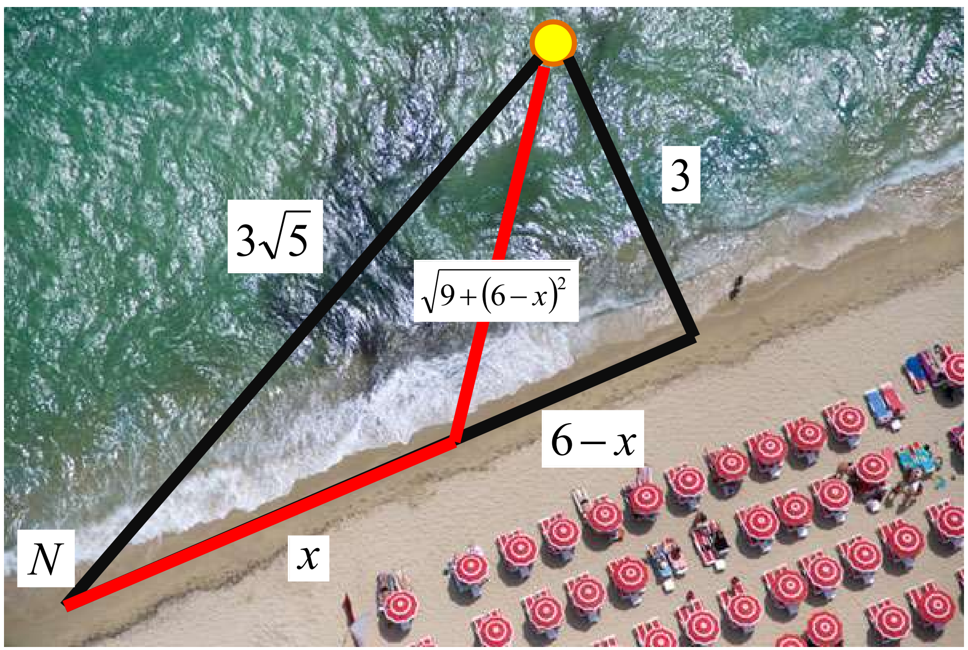
PROBLEMA 6

<u>PASO 2</u>: ¿Qué queremos maximizar o minimizar?

En este caso deseamos minimizar el **<u>TIEMPO</u>** del nadador para llegar a la boya. Ello dependerá del punto en el cual se lance al mar.

<u>PASO 3</u>: Variables. Construcción de la FUNCIÓN OBJETIVO.

Si llamamos x a la distancia que recorre a pie, entonces usando Pitágoras podemos averiguar la distancia que recorrerá a nado:



$$d^2 = 3^2 + (6-x)^2 \longrightarrow d = \sqrt{9+(6-x)^2}$$

Sabemos que la relación entre tiempo, distancia y velocidad es:

$$t = \frac{S}{v}$$

Así pues la función tiempo empleado por el nadador en llegar a la boya será:

$$T(x) = \underbrace{\boxed{\frac{x}{5}}}_{\text{Tiempo por playa}} + \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{9+(6-x)^2}}{3}}}_{\text{Tiempo por mar}}$$

PROBLEMA 6

<u>PASO 4 Y 5</u>: CONDICIÓN DE LIGADURA Y REDEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN.

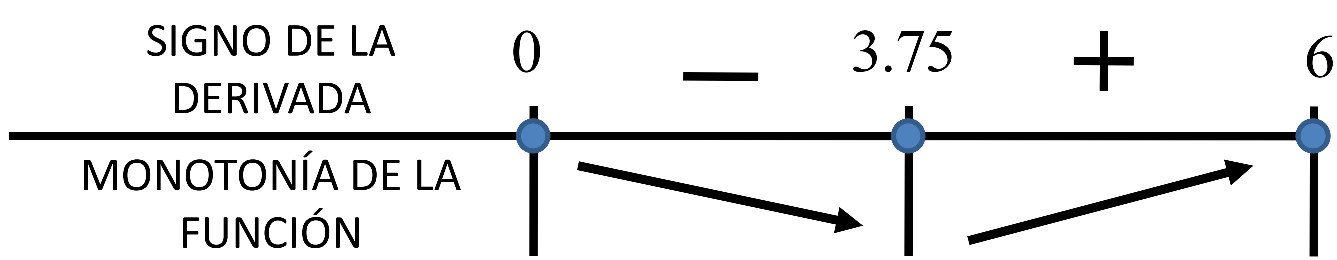
No son necesarios en este caso.

<u>PASO 6</u>: DERIVACIÓN Y OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

$$T(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{9+(6-x)^2}}{3} = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2-12x+45}}{3}$$

$$T'(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2x-12}{2\cdot\sqrt{x^2-12x+45}} = \frac{1}{5} + \frac{x-6}{3\cdot\sqrt{x^2-12x+45}} = \frac{3\cdot\sqrt{x^2-12x+45}+5x-30}{15\cdot\sqrt{x^2-12x+45}}$$

$$\Rightarrow \quad 3\cdot\sqrt{x^2-12x+45}+5x-30=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x=8.25 \\ x=3.75 \end{matrix}$$



MÍNIMO RELATIVO

PROBLEMA 6

<u>PASO 7</u>: REDACCIÓN DE LA SOLUCIÓN.

El nadador tardará menos tiempo en llegar a la boya si camina 3.75 km y luego se lanza directo al mar a por la boya.

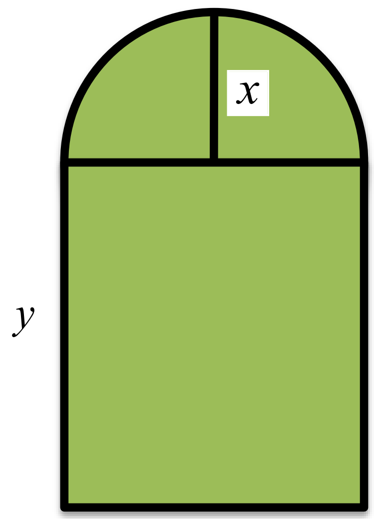
¿Cuánto tiempo debe estar caminando antes de lanzarse? Como sobre tierra se mueve a 5 Km/h, tendrá que estar andando por la playa:

$$t = \frac{3.75}{5} = 0.75\ h = \boxed{45\ \text{min}}$$

PROBLEMA 7

Una ventana normanda consiste en una ventana rectangular coronada por un semicírculo. Se desea enmarcar una de estas ventanas con 10 metros de marco metálico. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la ventana para que entre la mayor cantidad de luz posible?

PASO 1: Realizar una representación gráfica.



PASO 2: ¿Qué queremos maximizar o minimizar?

En este caso deseamos maximizar el **ÁREA** de la ventana para que entre la mayor cantidad de luz posible.

PASO 3: VARIABLES Y FUNCIÓN OBJETIVO.

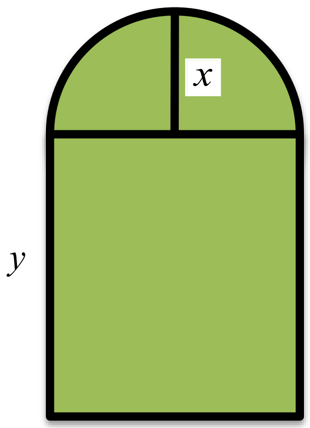
$x \equiv \textit{radio de la semicircunferencia en metros}$

$y \equiv \textit{altura del rectángulo en metros}$

$$A(x,y) = 2xy + \frac{\pi x^2}{2}$$

PROBLEMA 7

PASO 4: CONDICIÓN DE LIGADURA ENTRE VARIABLES



$$P(x,y) = (2x + 2y) + \frac{2\pi x}{2}$$

$$P(x,y) = 2x + 2y + \pi x \Rightarrow 10 = 2x + 2y + \pi x$$

$$y = \frac{10 - 2x - \pi x}{2}$$

PASO 5: REFORMULAMOS LA FUNCIÓN OBJETIVO

$$A(x,y) = 2xy + \frac{\pi x^2}{2} \Rightarrow A(x) = 2x \cdot \frac{10 - 2x - \pi x}{2} + \frac{\pi x^2}{2}$$

$$A(x) = 10x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{\pi x^2}{2}$$

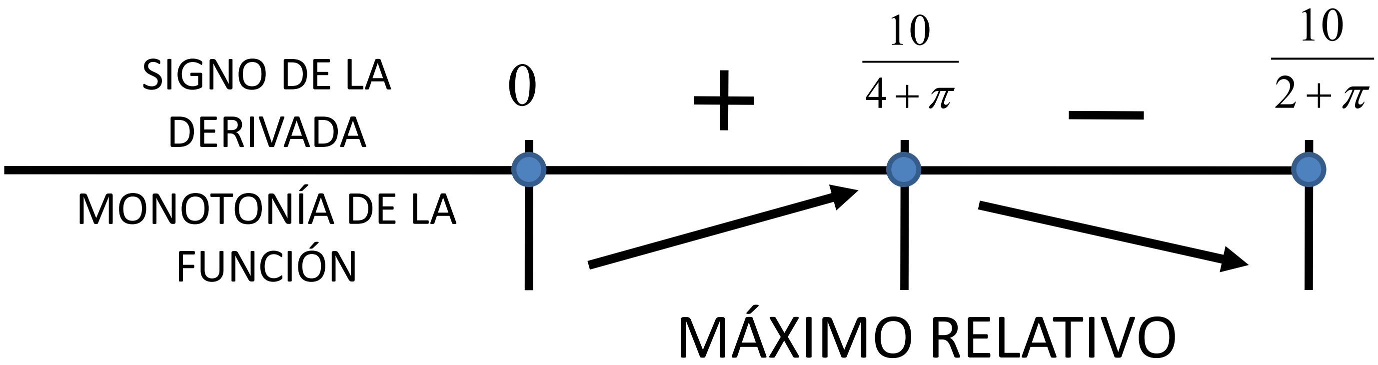
$$\boxed{A(x) = 10x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}}$$

PROBLEMA 7

PASO 6: DERIVACIÓN Y OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

$$A(x) = 10x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2} \Rightarrow A'(x) = 10 - 4x - \pi x \Rightarrow 10 - (4+\pi)\cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{4+\pi}$$

Comprobemos si este punto crítico se corresponde con el máximo de la función:



PASO 7: REDACCIÓN DE LA SOLUCIÓN.

Para que entre la mayor cantidad de luz por la ventana, las dimensiones deben ser:

$$x = \frac{10}{4+\pi}\ m$$

$$y = \frac{10 - 2x - \pi x}{2} = \frac{10 - (2+\pi)x}{2} = \frac{10 - (2+\pi)\cdot \frac{10}{4+\pi}}{2} = \frac{10}{4+\pi}\ m$$