SOLUCIONES

DOSSIER SEMANAL 18

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Resuelve de manera razonada las siguientes integrales indefinidas.

1) $\int\left(e^{-2x}+\sqrt[3]{x}-\dfrac{4}{x^3}\right)dx$ 2) $\int\dfrac{e^{3x}+e^{x}+1}{e^{x}}\,dx$ 3) $\int x\cdot e^{-x^2}\,dx$

4) $\int x^2\cdot sen\,x\,dx$ 5) $\int\dfrac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx$ 6) $\int sen\left(Ln\ x\right)dx$

7) $\int\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx$ 8) $\int\dfrac{Ln\ x}{\sqrt{x}}\,dx$ 9) $\int\dfrac{1}{sen\ x\cdot cos\,x}\,dx$

10) $\int\dfrac{3}{1+2\sqrt{e^{-x}}}\,dx$ 11) $\int\dfrac{Ln\ x^2}{x}\,dx$ 12) $\int\dfrac{8}{4x^2+12x+13}\,dx$

1) La integral propuesta es semi-inmediata. Primeramente, separamos la integral de la suma como suma de integrales. Luego resolvemos cada una de ellas:

$$\int\left(e^{-2x}+\sqrt[3]{x}-\frac{4}{x^3}\right)dx=\int e^{-2x}dx+\int\sqrt[3]{x}\ dx-\int\frac{4}{x^3}\ dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int-2\cdot e^{-2x}dx+\int x^{1/3}\ dx-4\int x^{-3}\ dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{x^{4/3}}{4/3}-4\frac{x^{-2}}{-2}+C=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{2}{x^2}+C\qquad con\ C\in R$$

2) Esta integral también puede tratarse como integral semi-inmediata. Primeramente, dividimos cada sumando del numerador entre el denominador y resolvemos las integrales simples resultantes.

$$\int\frac{e^{3x}+e^{x}+1}{e^{x}}\,dx=\int\frac{e^{3x}}{e^{x}}\,dx+\int\frac{e^{x}}{e^{x}}\,dx+\int\frac{1}{e^{x}}\,dx=\int e^{2x}\ dx+\int 1\,dx+\int e^{-x}\ dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}\ dx+\int 1\,dx-\int -e^{-x}\ dx=\frac{e^{2x}}{2}+x-e^{-x}+C\qquad con\ C\in R$$

3) Es una integral semi-inmediata sencilla.

$$\int x\cdot e^{-x^2}\ dx=-\frac{1}{2}\int -2x\cdot e^{-x^2}\ dx=-\frac{e^{-x^2}}{2}+C\qquad con\ C\in R$$

4) Dado que las funciones que se multiplican en la integral son de naturaleza distinta (polinómica y sinosuidal) podemos tratar de resolverla mediante la integración por partes:

$$\int x^2 \cdot sen\ x\ dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & \Rightarrow & du = 2x\ dx \\ dv = sen\ x\ dx & \Rightarrow & v = \int sen\ x\ dx = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= -x^2 \cdot \cos\ x + \int 2x \cdot \cos\ x\ dx = \begin{bmatrix} u = 2x & \Rightarrow & du = 2 \\ dv = \cos\ x\ dx & \Rightarrow & v = \int \cos\ x\ dx = sen\ x \end{bmatrix} =$$

$$= -x^2 \cdot \cos\ x + 2x \cdot sen\ x - \int 2\, sen\ x\ dx =$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot sen\ x + 2 \cdot \cos x + C =$$

$$= 2x \cdot sen\ x + \left(2 - x^2\right) \cdot \cos\ x + C \qquad con\ C \in R$$

5) Se trata de una integral racional donde el grado del denominador es mayor que el del numerador. En este caso, a la hora de factorizar el denominador se observa que todas sus soluciones son complejas y que la factorización en polinomios más simples viene dada por:

$$x^4 + 3x^2 + 2 = \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 + 2\right)$$

Así pues, descompondremos la integral en suma de otras dos integrales más sencillas cuyos denominadores representan soluciones complejas:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2}\, dx = \int \frac{Ax + B}{x^2 + 1}\, dx + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 2}\, dx$$

Calculemos los valores reales de los parámetros A, B, C y D:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2} = \frac{(Ax + B) \cdot \left(x^2 + 2\right) + (Cx + D) \cdot \left(x^2 + 1\right)}{x^4 + 3x^2 + 2}$$

$$x^3 + x^2 + x + 2 = (Ax + B) \cdot \left(x^2 + 2\right) + (Cx + D) \cdot \left(x^2 + 1\right)$$

Dando valores a x, obtenemos un sistema:

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2B + D$

$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 5 = 3A + 3B + 2C + 2D$

$x = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 = -3A + 3B - 2C + 2D$

$x = -2 \quad \Rightarrow \quad -4 = -12A + 6B - 10C + 5D$

Tras resolver el sistema de ecuaciones, obtenemos que los valores de los parámetros son: A=D=0 y C=B=1. Por tanto, la integral propuesta equivale a resolver:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{x^2+2}\,dx = arctg\ x + \frac{1}{2} Ln\left(x^2+2\right) + C$$

Siendo C un número real.

6) Como veremos esta integral se trata de una integral cíclica o recurrente que inicialmente se resuelve por partes:

$$\int sen\left(Ln\ x\right)dx = \begin{bmatrix} u = sen\left(Ln\ x\right) & \Rightarrow & du = \dfrac{\cos\left(Ln\ x\right)}{x}\,dx \\ dv = 1\,dx & \Rightarrow & v = \int 1\,dx = x \end{bmatrix} =$$

$$= x \cdot sen\left(Ln\ x\right) - \int x \cdot \frac{\cos\left(Ln\ x\right)}{x}\,dx = x \cdot sen\left(Ln\ x\right) - \int \cos\left(Ln\ x\right)dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \cos\left(Ln\ x\right) & \Rightarrow & du = \dfrac{-sen\left(Ln\ x\right)}{x}\,dx \\ dv = 1\,dx & \Rightarrow & v = \int 1\,dx = x \end{bmatrix} =$$

$$= x \cdot sen\left(Ln\ x\right) - x \cdot \cos\left(Ln\ x\right) - \int sen\left(Ln\ x\right)dx$$

Así pues, si llamamos $I = \int sen\left(Ln\ x\right)dx$ lo que hemos obtenido es:

$$\int sen\left(Ln\ x\right)dx = x \cdot sen\left(Ln\ x\right) - x \cdot \cos\left(Ln\ x\right) - \int sen\left(Ln\ x\right)dx$$

$$I = x \cdot sen\left(Ln\,x\right) - x \cdot \cos\left(Ln\,x\right) - I$$

$$2I = x \cdot sen\left(Ln\ x\right) - x \cdot \cos\left(Ln\ x\right) \Rightarrow I = \frac{x \cdot sen\left(Ln\ x\right) - x \cdot \cos\left(Ln\ x\right)}{2} + C$$

De donde se concluye que:

$$\int sen\left(Ln\ x\right)dx = \frac{x \cdot sen\left(Ln\ x\right) - x \cdot \cos\left(Ln\ x\right)}{2} + C \qquad con\ C \in R$$

7) Para resolver esta integral, realizaremos un cambio de variable:

$$\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,dt \Rightarrow dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^2}{t^2+t}\,2t\,dt = \int \frac{2t^2}{t+1}\,dt$$

La integral que nos queda es racional con el grado del numerador mayor que el del denominador. Así pues, recurriremos a hacer la división de polinomios y expresar dicha integral haciendo uso del cociente y el resto obtenidos:

$$\int \frac{2t^2}{t+1}\,dt = \left[\frac{2t^2}{t+1} = 2t - 2 + \frac{2}{t+1}\right] = \int 2t - 2 + \frac{2}{t+1}\,dt = \int 2t\,dt - \int 2\,dt + \int \frac{2}{t+1}\,dt =$$

$$= t^2 - 2t + 2 \cdot Ln\,|t+1| + C \qquad con\ C \in R$$

Ya sólo queda deshacer el cambio de variable:

$$\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx = x - 2\sqrt{x} + 2 \cdot Ln\,\left|\sqrt{x}+1\right| + C \qquad con\ C \in R$$

8) Esta integral la resolveremos utilizando el método de integración por partes:

$$\int \frac{Ln\ x}{\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} u = Ln\ x & \Rightarrow & du = 1/x\,dx \\ dv = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx & \Rightarrow & v = \int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = 2\sqrt{x} \end{bmatrix} =$$

$$= 2\sqrt{x}\ Ln\ x - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\ Ln\ x - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\ Ln\ x - 2\int x^{-1/2}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\ Ln\ x - 2 \cdot 2\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}\ Ln\ x - 4\sqrt{x} + C \qquad con\ C \in R$$

9) La integral es semi-inmediata de tipo logarítmica:

$$\int \frac{1}{sen\ x \cdot cos\,x}\,dx = \begin{bmatrix} Sabemos\ que: \\ 1 = sen^2 x + cos^2 x \end{bmatrix} = \int \frac{sen^2 x + cos^2 x}{sen\ x \cdot cos\,x}\,dx =$$

$$= \int \frac{sen^2 x}{sen\ x \cdot cos\,x}\,dx + \int \frac{cos^2 x}{sen\ x \cdot cos\,x}\,dx = \int \frac{sen\ x}{cos\,x}\,dx + \int \frac{cos\ x}{sen\ x}\,dx =$$

$$= -\int \frac{-\,sen\ x}{cos\,x}\,dx + \int \frac{cos\ x}{sen\ x}\,dx = -Ln\,|cos\,x| + Ln\,|sen\ x| + C$$

$$= Ln\left|\frac{sen\ x}{cos\,x}\right| + C = Ln\,|\ tg\ \ x\ | + C \qquad C \in R$$

10) La integral es semi-inmediata de tipo logarítmica:

$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{e^{-x}}}\,dx = \begin{bmatrix} Multiplicamos\ numerador\ y \\ denominador\ por\ \sqrt{e^x} \end{bmatrix} = \int \frac{3 \cdot \sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}+2}\,dx = \int \frac{3 \cdot e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+2}\,dx =$$

$$= 3 \cdot \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+2}\,dx = 2 \cdot 3 \cdot \int \frac{\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+2}\,dx = 6 \cdot Ln\left(e^{\frac{x}{2}}+2\right) + C =$$

$$= 6 \cdot Ln\left(\sqrt{e^x}+2\right) + C \qquad C \in R$$

11) La integral es semi-inmediata de tipo potencial:

$$\int \frac{Ln\ x^2}{x}\,dx = \int \frac{2\cdot Ln\ x}{x}\,dx = 2\cdot\int \frac{1}{x}\,Ln\ x\,dx = 2\cdot\int \frac{1}{x}\,(Ln\ x)^1\,dx = 2\,\frac{(Ln\ x)^2}{2} + C =$$

$$= (Ln\ x)^2 + C \qquad C \in R$$

12) La integral propuesta es de tipo arcotangente ya que las raíces del denominador son complejas y en el numerador hay una constante:

$$4x^2 + 12x + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 208}}{8} \notin R$$

Así pues, deberemos comenzar por averiguar con qué cuadrado perfecto puede ajustarse el denominador:

$$4x^2 + 12x + 13 = \underbrace{(2x+3)^2}_{4x^2+12x+9} + 4$$

Ello nos permite escribir:

$$\int \frac{8}{4x^2+12x+13}\,dx = \int \frac{8}{(2x+3)^2+4}\,dx = \begin{bmatrix} Dividimos\ numerador\ y \\ denominador\ entre\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{2}{\frac{(2x+3)^2}{4}+1}\,dx = \begin{bmatrix} Introducimos\ en\ un\ único\ cuadrado \\ el\ primer\ sumando\ del\ denominador \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{2}{\left(\frac{2x+3}{2}\right)^2+1}\,dx = \int \frac{2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+1}\,dx = 2\cdot\int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= 2\cdot arctg\left(x+\frac{3}{2}\right) + C \qquad C \in R$$

PROBLEMA 2: El *Jet Propulsion Laboratory* de la *NASA* necesita invertir dinero en contratar empleados y comprar máquinas para la elaboración de la sustancia eutéctica EU-257 destinada al campo de la nanotecnología cuántica. El laboratorio ha estimado que comprando ***m*** **máquinas** y contratando ***n*** **empleados**, la cantidad de EU-257 que puede producir viene dada por la función $f(m,n)=90\,m\,n^2$ (en kg). Cada máquina le supone al laboratorio una inversión de 2500€ mientras que cada nuevo empleado implica un coste de 1500€. Sabiendo que el laboratorio sólo dispone de un presupuesto de 22500€ para este proyecto, **determina el número de empleados que debe contratar y el número de máquinas que debe comprar para maximizar la producción** de la sustancia EU-257.

En este caso, la función objetivo ya viene determinada en el enunciado del problema. Sabemos que deseamos maximizar la producción, es decir:

$$f(m,n)=90\,m\,n^2$$

Lo único que debemos hacer ahora es encontrar una relación de ligadura entre las variables m y n para que podamos reformular la función objetivo utilizando únicamente una sola variable. Dicha relación está determinada por la restricción presupuestaria:

$$2500\,m+1500\,n=22500$$

Así pues, de aquí obtenemos que:

$$2500\,m+1500\,n=22500 \quad\Rightarrow\quad n=\frac{22500-2500\,m}{1500} \quad\Rightarrow\quad n=\frac{45-5m}{3}$$

Por tanto, la función objetivo será:

$$f(m,n)=90\,m\,n^2 \quad\Rightarrow\quad f(m)=90\,m\left(\frac{45-5m}{3}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad f(m)=10\,m(45-5m)^2$$

A continuación, derivamos y obtenemos los puntos críticos de la función objetivo:

$$f(m)=10\,m(45-5m)^2 \quad\Rightarrow\quad f\,'(m)=10\,(45-5m)^2-100m(45-5m)$$

$$\Rightarrow \quad f'(m)=10(45-5m)(45-5m-10m) \Rightarrow \quad f'(m)=10(45-5m)(45-15m)$$

$$f'(m)=10(45-5m)(45-15m)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m=9 \\ m=3 \end{cases}$$

Analizamos la monotonía de la función para determinar si los puntos críticos obtenidos se corresponden con un máximo o mínimo o ninguna de las dos cosas:

	0 — 3	3 — 9
Signo de f'(x)	**+**	**-**
Monotonía de f(x)	↗	↘

Por tanto, la producción de la sustancia EU-257 se maximizará comprando 3 máquinas y contratando a:

$$n=\frac{45-5\cdot 3}{3}=\frac{30}{3}=10 \text{ empleados}$$

Además, la producción máxima será de:

$$f(3,10)=90\cdot 3\cdot 10^2=27000 \text{ kg de EU-257}$$

PROBLEMA 5: **Representa** gráficamente (tras realizar un análisis exhaustivo) la siguiente función real de variable real:

$$f(x)=\frac{x^2+11}{x+5}$$

1. **DOMINIO**: El dominio de la función es $D[f(x)]=R-\{-5\}$. Ya que el denominador se anularía en x=-5.

2. **CONTINUIDAD**: La función $f(x)$ es continua en todo su dominio.

3. **SIMETRÍAS**: En este caso la función no presenta ningún tipo de simetría.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+11}{-x+5}=\frac{x^2+11}{-x+5}\neq f(x) \qquad f(-x)=\frac{x^2+11}{-x+5}\neq -f(x)$$

4. **CORTES CON LOS EJES COORDENADOS**:

Corte con el eje OY: $x=0 \quad \Rightarrow \quad f(0)=\frac{0^2+11}{0+5}=\frac{11}{5} \quad \Rightarrow \quad A\left(0,\frac{11}{5}\right)$

Corte con el eje OX: $\frac{x^2+11}{x+5}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+11=0 \quad \Rightarrow \quad x\notin R$

Así pues, el único punto donde la función corta a los ejes coordenados es en el punto $A\left(0,\frac{11}{5}\right)$.

5. **ASÍNTOTAS**:

5.1. **Asíntotas verticales**: Se buscan y estudian en aquellos puntos problemáticos respecto al dominio.

$$\lim_{x\to -5+} f(x)=\lim_{x\to -5+}\frac{x^2+11}{x+5}=\left[\frac{\infty}{0}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to -5-} f(x)=\lim_{x\to -5-}\frac{x^2+11}{x+5}=\left[\frac{\infty}{0}\right]=-\infty$$

Por tanto, la función posee una asíntota vertical en x=-5.

5.2. **Asíntotas horizontales**: En este caso, al tratarse de una función racional donde el grado del numerador es exactamente una unidad más grande que el grado del denominador, sabemos que no poseerá asíntota horizontal, pero sí tendrá oblicua.

5.3. **Asíntotas oblicuas**: En este caso, calcularemos la asíntota oblicua realizando el cociente de los polinomios.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 11 & x-5 \\ \cline{2-2} -x^2+5x & x+5 \qquad \Rightarrow \qquad y = x+5 \\ \cline{1-1} 5x+11 & \\ -5x+25 & \\ \cline{1-1} 36 & \end{array}$$

6. **PERIODICIDAD**: La función propuesta no tiene ningún tipo de periodicidad.

7. **MONOTONÍA**: Realicemos el estudio de la primera derivada:

$$f(x)=\frac{x^2+11}{x+5} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{2x\cdot(x+5)-x^2-11}{(x+5)^2}=\frac{x^2+10x-11}{(x+5)^2}$$

Igualamos la derivada a cero para obtener los puntos críticos:

$$\frac{x^2+10x-11}{(x+5)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+10x-11=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ x=-11 \end{cases}$$

Analizaremos ahora la monotonía de la función:

	-11	-5	1	$+\infty$
Signo de f'(x)	+	-	-	+
Monotonía de f(x)	↗	↘	↘	↗

La función presenta un máximo relativo en $\left(-11, \frac{33}{4}\right)$ y un mínimo relativo en $(1, 2)$.

Así pues, teniendo en cuenta todos estos parámetros, la representación gráfica aproximada de la función será: