SOLUCIONES

DOSSIER SEMANAL 13

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: A continuación determina (en cada caso, *siempre que sea posible*) la expresión analítica que permite calcular la matriz X que verifica la ecuación matricial indicada:

a) $AX-2B=C^t$	b) $A=CX$	c) $XB+B=A-2X$
d) $AX+XC=I$	e) $AX+C=BX$	f) $AXB-2C^t=4XB$

a) $AX-2B=C^t \quad \Rightarrow \quad AX=C^t+2B$

Si la matriz A es regular (es decir, si tiene inversa) podremos pre-multiplicar ambos términos de la ecuación por la inversa de la matriz A:

$$AX=C^t+2B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX=A^{-1}\cdot\left(C^t+2B\right) \quad \Rightarrow \quad I\cdot X=A^{-1}\cdot\left(C^t+2B\right)$$
$$\Rightarrow \quad X=A^{-1}\cdot\left(C^t+2B\right)$$

b) Nuevamente, si la matriz C es regular:

$$A=CX \quad \Rightarrow \quad C^{-1}A=C^{-1}CX \quad \Rightarrow \quad C^{-1}A=I\cdot X \quad \Rightarrow \quad C^{-1}A=X$$

c) $XB+B=A-2X \quad \Rightarrow \quad XB+2X=A-B \quad \Rightarrow \quad X\cdot(B+2I)=A-B$

Si la matriz $B+2I$ es regular (es decir, si tiene inversa) podremos escribir:

$$X\cdot(B+2I)=A-B \quad \Rightarrow \quad X\cdot(B+2I)\cdot(B+2I)^{-1}=(A-B)\cdot(B+2I)^{-1} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad X\cdot I=(A-B)\cdot(B+2I)^{-1} \quad \Rightarrow \quad X=(A-B)\cdot(B+2I)^{-1}$$

d) De la ecuación propuesta no podemos obtener una expresión analítica de la matriz X ya que no podemos extraerla factor común al estar multiplicando a otras matrices por lados distintos.

e) $AX+C=BX \quad \Rightarrow \quad AX-BX=-C \quad \Rightarrow \quad (A-B)\cdot X=-C$

Si la matriz $A-B$ es regular (es decir, si tiene inversa) podremos escribir:

$$(A-B)\cdot X=-C \quad \Rightarrow \quad (A-B)^{-1}(A-B)\cdot X=(A-B)^{-1}(-C) \quad \Rightarrow \quad I\cdot X=-(A-B)^{-1}C$$
$$\Rightarrow \quad X=-(A-B)^{-1}C$$

f) $AXB-2C^t=4XB \quad \Rightarrow \quad AXB-4XB=2C^t \quad \Rightarrow \quad (A-4I)\cdot XB=2C^t$

Si la matriz $A-4I$ es regular (es decir, si tiene inversa) podremos escribir:

$$(A-4I)\cdot XB=2C^t \quad \Rightarrow \quad (A-4I)^{-1}(A-4I)\cdot XB=(A-4I)^{-1}2C^t \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad I\cdot XB=(A-4I)^{-1}2C^t \quad \Rightarrow \quad XB=(A-4I)^{-1}2C^t$$

Si la matriz B es regular (es decir, si tiene inversa) podremos escribir:

$$XB=(A-4I)^{-1}2C^t \quad \Rightarrow \quad XBB^{-1}=(A-4I)^{-1}2C^tB^{-1} \quad \Rightarrow \quad X\cdot I=(A-4I)^{-1}2C^tB^{-1} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad X=(A-4I)^{-1}2C^tB^{-1} \quad \Rightarrow \quad X=2(A-4I)^{-1}C^tB^{-1}$$

PROBLEMA 2: Dada la siguiente matriz cuadrada de orden 3:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calcula su determinante.

b. Calcula los siguientes determinantes: $\left|E^T\right|$, $\left|-\frac{1}{2}E\right|$, $\left|E^2\right|$ y $\left|\sqrt[3]{20}\cdot E^{-1}\right|$.

a) Calcularemos su determinante utilizando la regla de Sarrus:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad |E| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-3+0)-(2+0+1) = -4$$

b) Para calcular los determinantes planteados, recurriremos a las propiedades de los determinantes siempre que sea posible:

- Dado que una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante:

$$\left|E^T\right| = |E| = -4$$

- Utilizaremos aquí la propiedad $|k\cdot A| = k^n|A|$ siendo n el orden de la matriz A, que en este caso que nos ocupa es 3:

$$\left|-\frac{1}{2}E\right| = \left(-\frac{1}{2}\right)^3|E| = -\frac{1}{8}\cdot(-4) = \frac{1}{2}$$

- Sabemos que $\left|A^n\right| = |A|^n$, por tanto:

$$\left|E^2\right| = |E|^2 = (-4)^2 = 16$$

- Utilizando propiedades descritas con anterioridad:

$$\left|\sqrt[3]{20}\cdot E^{-1}\right| = \left(\sqrt[3]{20}\right)^3\left|E^{-1}\right| = 20\cdot\left|E^{-1}\right| = 20\cdot|E|^{-1} = \frac{20}{|E|} = \frac{20}{-4} = -5$$

PROBLEMA 3: ¿Qué significa que dos matrices sean inversas una de la otra? Demuestra que cualquier matriz M (cuadrada de orden n) que verifica la relación $M^2 - 3M - I = 0$ tiene inversa (donde I denota la matriz identidad de orden n)

Se dice que dos matrices A y B son inversas entre sí si se verifica que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Basándonos en esta definición de matriz inversa vamos a probar que toda matriz M (cuadrada de orden n) que verifica la relación $M^2 - 3M - I = 0$ tiene inversa. Para ello, simplemente basta con manipular adecuadamente la relación proporcionada:

$$M^2 - 3M - I = 0 \quad \Rightarrow \quad M^2 - 3M = I \quad \Rightarrow \quad M \cdot (M - 3I) = I$$

Así pues hemos encontrado una matriz (que es M-3I) que al multiplicarla por M me ha dado la identidad. Ello quiere decir que

$$M^{-1} = M - 3I$$

Y por tanto la matriz M tiene inversa.

PROBLEMA 4: Calcula el valor del siguiente determinante en función del parámetro real x:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

Antes de realizar el desarrollo del determinante por adjuntos, nos centraremos en conseguir algunos ceros en la matriz utilizando las propiedades de los determinantes que mantienen inalterable el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F2' = F2 - F1 \\ F3' = F3 - F1 \\ F4' = F4 - F1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x-3 & 3-x & 0 & 0 \\ x-3 & 0 & 3-x & 0 \\ x-3 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x-3 & -(x-3) & 0 & 0 \\ x-3 & 0 & -(x-3) & 0 \\ x-3 & 0 & 0 & -(x-3) \end{vmatrix} = \text{[Sacando factor común de las filas 1, 2 y 3]=}$$

$$= (x-3)^3 \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Así pues, si calculamos ahora el determinante que queda mediante su desarrollo por adjuntos a partir de la última columna (por ejemplo), obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x \cdot A_{14} - 1 \cdot A_{44} = -x \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -x - (3 + 2x) = -3 - 3x = -3 \cdot (x+1)$$

Así pues, el determinante que nos piden será:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = (x-3)^3 \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\cdot(x-3)^3(x+1)$$