SOLUCIONES

DOSSIER SEMANAL 11

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Calcula las siguientes integrales indefinidas:

En lo sucesivo, la letra *C* representa una constante real cualquiera.

1) Esta integral es de tipo semi-inmediata:

$$\int (x-1)\cdot\left(x^2-2x\right)^6 dx = \frac{1}{2}\cdot\int 2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2-2x\right)^6 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-2x\right)^7}{7}+C = \frac{\left(x^2-2x\right)^7}{14}+C$$

2) Esta integral es inmediata, simplemente hemos de expresar el cociente como producto para verlo claramente:

$$\int \frac{tg^3 x}{cos^2 x}dx = \int \frac{1}{cos^2 x}\cdot tg^3 x\, dx = \frac{tg^4 x}{4}+C$$

3) En este caso, la integral propuesta es semi-inmediata:

$$\int \frac{1}{(1-3x)^2}dx = \int (1-3x)^{-2}\, dx = -\frac{1}{3}\cdot\int -3\cdot(1-3x)^{-2}\, dx = -\frac{1}{3}\cdot\frac{(1-3x)^{-1}}{-1}+C =$$

$$= \frac{1}{3\cdot(1-3x)}+C = \frac{1}{3-9x}+C$$

4) También es semi-inmediata de tipo potencial:

$$\int \frac{x}{\left(2x^2+1\right)^4}dx = \int x\cdot\left(2x^2+1\right)^{-4}\, dx = \frac{1}{4}\cdot\int 4\cdot x\cdot\left(2x^2+1\right)^{-4}\, dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(2x^2+1\right)^{-3}}{-3}+C =$$

$$= -\frac{1}{12\cdot\left(2x^2+1\right)^3}+C$$

5) Nos encontramos con otra integral semi-inmediata de tipo potencial. Si observamos, tras expresar la raíz cuadrada en forma de potencia vemos que:

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx = \int x\cdot\left(3x^2+1\right)^{-1/2}dx = \frac{1}{6}\cdot\int 6\cdot x\cdot\left(3x^2+1\right)^{-1/2}dx =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{\left(3x^2+1\right)^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{6}\cdot\left(3x^2+1\right)^{1/2} + C = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3x^2+1} + C$$

6) Para resolver esta integral, realizaremos la división de cada sumando del numerador entre el denominador. Tras ellos integraremos cada sumando:

$$\int \frac{x^3+5x^2-x-1}{x^2}\,dx = \int \frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\,dx = \int x+5-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= \int x\,dx + \int 5\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 5x - Ln\,|\,x\,| + \frac{1}{x} + C$$

7) Se trata de una integral semi-inmediata. Para identificarla es necesario recordar que la integral de la tangente tiene varias expresiones posibles. En concreto:

$$\int 1+tg^2 x\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg\,x + C$$

Así pues:

$$\int \frac{1+tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)\,dx = 2\cdot\int \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)\,dx = 2\cdot tg\sqrt{x} + C$$

8) En esta ocasión nos encontramos frente a una integral de tipo racional donde el grado del numerador es mayor que el del denominador. Así pues, deberemos iniciar el cálculo de la integral realizando la división de los dos polinomios. En este caso, la división puede realizarse aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & \boxed{2} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D(x)}{d(x)} = c(x) + \dfrac{r(x)}{d(x)} \\ \\ \dfrac{x^5+2x^2+1}{x+1} = x^4 - x^3 + x^2 + x - 1 + \dfrac{2}{x+1} \end{cases}$$

Así pues:

$$\int \frac{x^5+2x^2+1}{x+1}\,dx=\int x^4-x^3+x^2+x-1+\frac{2}{x+1}\,dx=$$

$$=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+2\cdot Ln\left|\,x+1\,\right|+C=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+Ln\left(x+1\right)^2+C$$

9) Esta integral es semi-inmediata:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2\cdot e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx=\frac{1}{2}\cdot Ln\left(1+e^{2x}\right)+C$$

10) Nuevamente, a pesar de la aparente complejidad, la integral propuesta en este apartado es inmediata. Si observamos, es fácil ver que el numerador coincide con la derivada del denominador. Es, por tanto, de tipo logarítmica:

$$\int \frac{sen\,x+\cos x}{sen\,x-\cos x}\,dx=Ln\left|\,sen\,x-\cos x\,\right|+C$$

11) Tratando la integral como semi-inmediata de tipo sinusoidal, obtenemos:

$$\int x\cdot sen\,\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int 2\cdot x\cdot sen\,\left(x^2\right)dx=-\frac{1}{2}\cdot\cos\left(x^2\right)+C$$

12) La integral propuesta es inmediata de tipo arcotangente:

$$\int \frac{cos\ x}{1+sen^2x}\,dx=arctg\,\left(sen\ x\right)+C$$

13) En este caso estamos frente a una integral semi-inmediata de tipo arcontangente:

$$\int \frac{3}{4+9x^2}\,dx=\int\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{4}x^2}\,dx=\frac{3}{4}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\int\frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{3x}{2}\right)+C$$

14) Esta integral se resuelve fácilmente aplicando dos veces la técnica de integración por partes:

$$\int x^2\cdot e^{-5x}\,dx=\begin{bmatrix} u=x^2 & \Rightarrow & du=2x \\ dv=e^{-5x}\,dx & \Rightarrow & v=\int e^{-5x}\,dx=\frac{-1}{5}\cdot e^{-5x}\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{x^2}{5}\cdot e^{-5x}-\int-\frac{2}{5}\cdot x\cdot e^{-5x}\,dx=-\frac{x^2}{5}\cdot e^{-5x}+\frac{2}{5}\int x\cdot e^{-5x}\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=x & \Rightarrow & du=1 \\ dv=e^{-5x}\,dx & \Rightarrow & v=\int e^{-5x}\,dx=\frac{-1}{5}\cdot e^{-5x}\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{x^2}{5}\cdot e^{-5x}+\frac{2}{5}\left[-\frac{x}{5}\cdot e^{-5x}+\frac{1}{5}\cdot\int e^{-5x}\,dx\right]=-\frac{x^2}{5}\cdot e^{-5x}-\frac{2x}{25}\cdot e^{-5x}-\frac{2}{125}\cdot e^{-5x}+C=$$

$$=-e^{-5x}\cdot\left(\frac{x^2}{5}+\frac{2x}{25}+\frac{2}{125}\right)+C$$

15) En este caso, la integral se puede resolver aplicando el método de integración por partes:

$$\int\left(x^3+1\right)\cdot Ln\,x\,dx=\begin{bmatrix} u=Ln\,x & \Rightarrow & du=\frac{1}{x} \\ dv=\left(x^3+1\right)dx & \Rightarrow & v=\int\left(x^3+1\right)dx=\frac{x^4}{4}+x\end{bmatrix}=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\cdot Ln\,x-\int\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^4}{4}+x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\cdot Ln\,x-\int\left(\frac{x^3}{4}+1\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\cdot Ln\,x-\frac{x^4}{16}-x+C$$

16) Dado que las funciones que se multiplican en la integral son de naturaleza distinta (polinómica y sinosuidal) podemos tratar de resolverla mediante la integración por partes:

$$\int (x^2+x)\cdot sen\ x\ dx = \begin{bmatrix} u = x^2+x & \Rightarrow & du = 2x+1 \\ dv = sen\ x\ dx & \Rightarrow & v = \int sen\ x\ dx = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= -(x^2+x)\cdot \cos\ x + \int (2x+1)\cdot \cos\ x\ dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1 & \Rightarrow & du = 2 \\ dv = \cos\ x\ dx & \Rightarrow & v = \int \cos\ x\ dx = sen\ x \end{bmatrix} =$$

$$= -(x^2+x)\cdot \cos\ x + (2x+1)\cdot sen\ x - \int 2\, sen\ x\ dx =$$

$$= -(x^2+x)\cdot \cos\ x + (2x+1)\cdot sen\ x + 2\cdot \cos x + C =$$

$$= (2x+1)\cdot sen\ x + (2-x^2-x)\cdot \cos\ x + C$$

17) La integral es de tipo racional con el grado del denominador mayor que el del denominador. Tras la factorización del denominador, observamos que sus raíces son todas simples:

$$\int \frac{3x^2-4x-16}{(x+1)\cdot(x^2-4)}\,dx = \int \frac{3x^2-4x-16}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}\,dx$$

Así pues descompondremos la función racional como suma de tres funciones racionales más simples:

$$\frac{3x^2-4x-16}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A\cdot(x-2)\cdot(x+2) + B\cdot(x+2)\cdot(x+1) + C\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}$$

Así pues:

$$3x^2-4x-16 = A\cdot(x-2)\cdot(x+2) + B\cdot(x+2)\cdot(x+1) + C\cdot(x-2)\cdot(x+1)$$

$$x=-1 \quad \Rightarrow \quad -9=-3A \quad \Rightarrow \quad A=3$$

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad -12=12B \quad \Rightarrow \quad B=-1$$

$$x=-2 \quad \Rightarrow \quad 4=4C \quad \Rightarrow \quad C=1$$

Esto permite escribir:

$$\frac{3x^2-4x-16}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$$

Y por tanto:

$$\int \frac{3x^2-4x-16}{(x+1)\cdot(x^2-4)}\,dx = \int \frac{3x^2-4x-16}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}\,dx = \int \frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= 3\cdot Ln\,|x+1| - Ln\,|x-2| + Ln\,|x+2| + C = Ln\left|\frac{(x+2)\cdot(x+1)^3}{x-2}\right| + C$$

18) La integral es de tipo racional con el grado del denominador mayor que el del denominador. Tras la factorización del denominador, observamos que tiene una raíz simple y otra múltiple:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-3x+2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\,dx$$

Así pues descompondremos la función racional como suma de tres funciones racionales más simples:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x+2)}$$

Así pues:

$$x^2+1 = A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)^2$$

$$x=1 \;\Rightarrow\; 2=3B \;\Rightarrow\; B=\frac{2}{3}$$

$$x=-2 \;\Rightarrow\; 5=9C \;\Rightarrow\; C=\frac{5}{9}$$

$$x=0 \;\Rightarrow\; 1=-2A+2B+C \;\Rightarrow\; A=\frac{4}{9}$$

Esto permite escribir:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2\cdot(x+2)} = \frac{4/9}{x-1}+\frac{2/3}{(x-1)^2}+\frac{5/9}{x+2}$$

Y por tanto:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-3x+2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\,dx = \int \frac{4/9}{x-1} + \frac{2/3}{(x-1)^2} + \frac{5/9}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot Ln\,|\,x-1\,| - \frac{2}{3}\cdot(x-1)^{-1} + \frac{5}{9}\cdot Ln\,|\,x+2\,| + C =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot Ln\,|\,x-1\,| - \frac{2}{3\cdot(x-1)} + \frac{5}{9}\cdot Ln\,|\,x+2\,| + C$$

PROBLEMA 2: Calcula las siguientes integrales indefinidas:

En lo sucesivo, la letra *C* representa una constante real cualquiera.

1) La integral propuesta es cíclica:

$$\int e^x \cdot sen\ 2x\ dx = \left[\begin{array}{ccc} u = e^x & \Rightarrow & du = e^x \\ dv = sen\ 2x\ dx & \Rightarrow & v = \int sen\ 2x\ dx = \frac{-1}{2} \cdot \cos 2x \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{e^x}{2} \cdot \cos 2x - \int -\frac{e^x}{2} \cdot \cos 2x\ dx = -\frac{e^x}{2} \cdot \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cdot \cos 2x\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} u = e^x & \Rightarrow & du = e^x \\ dv = \cos 2x\ dx & \Rightarrow & v = \int \cos 2x\ dx = \frac{1}{2} \cdot sen\ 2x \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{e^x}{2} \cdot \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^x}{2} \cdot sen\ 2x - \frac{1}{2} \cdot \int e^x \cdot sen\ 2x\ dx \right) =$$

$$= -\frac{e^x}{2} \cdot \cos 2x + \frac{e^x}{4} \cdot sen\ 2x - \frac{1}{4} \cdot \int e^x \cdot sen\ 2x\ dx$$

Llamando $I = \int e^x \cdot sen\ 2x\ dx$ (que es la integral que queremos calcular), observamos que hemos llegado a:

$$\int e^x \cdot sen\ 2x\ dx = -\frac{e^x}{2} \cdot \cos 2x + \frac{e^x}{4} \cdot sen\ 2x - \frac{1}{4} \cdot \int e^x \cdot sen\ 2x\ dx$$

$$I = -\frac{e^x}{2} \cdot \cos 2x + \frac{e^x}{4} \cdot sen\ 2x - \frac{1}{4} \cdot I$$

$$I + \frac{1}{4} \cdot I = -\frac{e^x}{2} \cdot \cos 2x + \frac{e^x}{4} \cdot sen\ 2x$$

$$\frac{5}{4} \cdot I = -\frac{e^x}{2} \cdot \cos 2x + \frac{e^x}{4} \cdot sen\ 2x \quad \Rightarrow \quad I = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{e^x}{2} \cdot \cos 2x + \frac{e^x}{4} \cdot sen\ 2x \right)$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{2e^x}{5} \cdot \cos 2x + \frac{e^x}{5} \cdot sen\ 2x$$

Por tanto:

$$\int e^x \cdot sen\ 2x\ dx = -\frac{2e^x}{5} \cdot \cos 2x + \frac{e^x}{5} \cdot sen\ 2x + C$$

2) Para resolver esta integral hemos de aplicar las identidades trigonométricas que conocemos de cursos anteriores:

$$\int sen\ 2x\ dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2 \cdot sen\ 2x\ dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + C$$

3) Aplicando las identidades trigonométricas:

$$1 = sen^2 x + \cos^2 x$$
$$sen\ 2x = 2 \cdot sen\ x \cdot \cos x$$

Obtenemos:

$$\int \frac{1}{sen\ 2x}\ dx = \int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{2 \cdot sen\ x \cdot \cos x}\ dx = \int \frac{sen\ x}{2 \cdot \cos x}\ dx + \int \frac{\cos x}{2 \cdot sen\ x}\ dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{sen\ x}{\cos x}\ dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{sen\ x}\ dx = -\frac{1}{2} \cdot Ln\left|\cos x\right| + \frac{1}{2} \cdot Ln\left|sen\ x\right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot Ln\left|\frac{sen\ x}{\cos x}\right| + C = \frac{1}{2} \cdot Ln\left|tg\ x\right| + C = Ln\left|\sqrt{tg\ x}\right| + C$$

4) Esta integral puede resolverse utilizando un cambio de variable de tipo trigonométrico:

$$\int \sqrt{9 - x^2}\ dx = \begin{bmatrix} x = 3 \cdot \cos t \\ dx = -3 \cdot sen\ t\ dt \end{bmatrix} = \int -3 \cdot \sqrt{9 - (3 \cdot \cos t)^2}\ sen\ t\ dt =$$

$$= -3 \cdot \int \sqrt{9 - 9 \cdot \cos^2 t} \cdot sen\ t\ dt = -3 \cdot \int 3 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 t} \cdot sen\ t\ dt =$$

$$= -9 \cdot \int \sqrt{sen^2 t} \cdot sen\ t\ dt = -9 \cdot \int sen\ t \cdot sen\ t\ dt = -9 \cdot \int sen^2\ t\ \ dt =$$

$$= -9 \cdot \int \sqrt{sen^2 t} \cdot sen\ t\ dt = -9 \cdot \int sen\ t \cdot sen\ t\ dt = -9 \cdot \int sen^2\ t\ \ dt$$

Dado que la integral $\int sen^2\ t\ \ dt = \frac{t}{2} - \frac{sen\ 2t}{4} + C$ (tal como puede comprobarse en el apartado 9 de este mismo ejercicio), obtenemos que:

$$\int \sqrt{9-x^2}\ \ dx = -9 \cdot \int sen^2\ t\ \ dt = -9 \cdot \left(\frac{t}{2} - \frac{sen\ 2t}{4} \right) + C$$

Deshaciendo ahora el cambio de variable:

$$x = 3 \cdot \cos t \quad \Rightarrow \quad \cos t = \frac{x}{3} \quad \Rightarrow \quad sen^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad sen\ t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

sustituyendo, se concluye que:

$$\int \sqrt{9-x^2}\ \ dx = -9 \cdot \int sen^2\ t\ \ dt = -9 \cdot \left(\frac{t}{2} - \frac{sen\ 2t}{4} \right) + C = -9 \cdot \left(\frac{t}{2} - \frac{2 \cdot sen\ t \cdot \cos t}{4} \right) + C$$

$$= -\frac{9}{2} \cdot \left(t - 2 \cdot sen\ t \cdot \cos t \right) + C = -\frac{9}{2} \cdot \left(\arccos\left(\frac{x}{3}\right) - 2 \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \cdot \frac{x}{3} \right) + C =$$

$$= -\frac{9}{2} \cdot \arccos\left(\frac{x}{3}\right) + x \cdot \sqrt{9-x^2} + C$$

También podría haberse realizado con el cambio $x = 3 \cdot sen\ t$

5) Resolveremos esta integral aplicando un cambio de variable:

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}\ dx = \begin{bmatrix} t^2 = x+2 \\ 2t\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{\sqrt{t^2}}{t^2 - 2 + 1} \cdot 2t\ dt = \int \frac{t}{t^2-1} \cdot 2t\ dt = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\ dt$$

La integral que queda es de tipo racional con grado del numerado mayor que el denominador. Así pues, hemos de realizar la división de polinomios antes de continuar:

$$\frac{t^2}{t^2-1} = 1 + \frac{1}{t^2-1} \quad \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}\ dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\ dt = 2\int 1 + \frac{1}{t^2-1}\ dt =$$

$$= 2 \cdot \left(t + \int \frac{1}{t^2-1}\ dt \right) = 2t + 2 \cdot \int \frac{1}{t^2-1}\ dt = 2t + 2I$$

Ahora, la integral I que queda es racional con raíces reales simples en el denominador:

$$I = \int \frac{1}{t^2 - 1}\, dt = \int \frac{1}{(t-1)\cdot(t+1)}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(t-1)\cdot(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A\cdot(t+1) + B\cdot(t-1)}{(t-1)\cdot(t+1)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A\cdot(t+1) + B\cdot(t-1)$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 = -2B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

$$I = \int \frac{1}{t^2-1}\, dt = \int \frac{1}{(t-1)\cdot(t+1)}\, dt = \int \frac{1/2}{t-1}\, dt - \int \frac{1/2}{t+1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot Ln\,|t-1| - \frac{1}{2}\cdot Ln\,|t+1|$$

Esto nos lleva a que:

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}\, dx = \begin{bmatrix} t^2 = x+2 \\ 2t\ dt = dx \end{bmatrix} = 2t + 2I = 2t + Ln\,|t-1| - Ln\,|t+1| + C$$

Deshaciendo el cambio de variable y simplificando:

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}\, dx = \begin{bmatrix} t^2 = x+2 \\ t = \sqrt{x+2} \end{bmatrix} = 2\cdot\sqrt{x+2} + Ln\left|\sqrt{x+2}-1\right| - Ln\left|\sqrt{x+2}+1\right| + C =$$

$$= 2\cdot\sqrt{x+2} + Ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}\right| + C$$

6) Esta integral es racional con una raíz real simple y una compleja en el denominador:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x}\, dx = \int \frac{x^2 - x + 1}{x\cdot(x^2+1)}\, dx$$

Descomponemos la función racional en suma de otras más sencillas:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2+1} = \frac{A\cdot(x^2+1) + (Mx+N)\cdot x}{x\cdot(x^2+1)}$$

$$x^2 - x + 1 = A \cdot \left(x^2+1\right) + \left(Mx+N\right) \cdot x$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = A$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2A + M + N \quad \Rightarrow \quad M + N = -1$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad 3 = 2A + M - N \quad \Rightarrow \quad M - N = 1$$

$$\Rightarrow \quad M = 0 \quad N = -1$$

Así pues:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x}\, dx = \int \frac{x^2 - x + 1}{x \cdot \left(x^2+1\right)}\, dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

Lo que nos lleva a que:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x}\, dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}\, dx = Ln\,|x| - arctg\ x + C$$

7) Esta integral puede resolverse por partes:

$$\int arctg\ x\ dx = \int 1 \cdot arctg\ x\ dx = \left[\begin{array}{lll} u = arctg\ x & \Rightarrow & du = \dfrac{1}{1+x^2} \\ dv = 1\, dx & \Rightarrow & v = \int 1\, dx = x \end{array}\right] =$$

$$= x \cdot arctg\ x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \cdot arctg\ x - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= x \cdot arctg\ x - \frac{1}{2} Ln\left(1+x^2\right) + C = x \cdot arctg\ x - Ln\sqrt{1+x^2} + C$$

8) Esta integral puede resolverse aplicando un cambio de variable:

$$\int sen^2\ x \cdot cos^3 x\ dx = \int sen^2\ x \cdot cos^2 x \cdot \cos x\ dx = \int sen^2\ x \cdot \left(1 - sen^2 x\right) \cdot \cos x\ dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = sen\ x \\ dt = \cos x\, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{array}\right] = \int t^2 \cdot \left(1 - t^2\right) \cdot \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int t^2 \cdot \left(1 - t^2\right) dt =$$

$$= \int t^2 - t^4\ dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{sen^3 x}{3} - \frac{sen^5 x}{5} + C$$

9) Para resolver esta integral aplicaremos y combinaremos un par de identidades trigonométricas básicas:

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2 x + sen^2 x = 1 \\ \cos^2 x - sen^2 x = \cos 2x\end{array}\right\} -$$

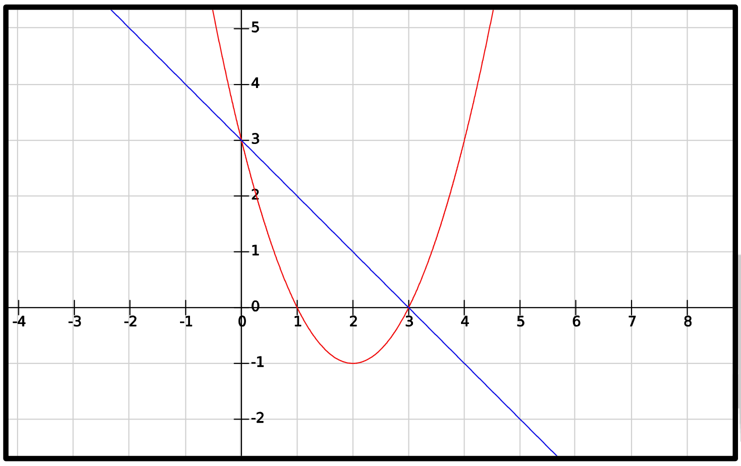
$$\overline{\qquad 2sen^2 x = 1 - \cos 2x \qquad} \quad \Rightarrow \quad sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Así pues:

$$\int sen^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{sen\ 2x}{4} + C$$

PROBLEMA 3: Calcula el área del recinto plano cerrado delimitado por las gráficas de las curvas $y = x^2 - 4x + 3$ y $y = 3 - x$.

Como paso previo realizaremos una representación gráfica del área que pretendemos calcular y calcularemos los puntos exactos de corte entre ambas curvas:



PUNTOS DE CORTE ENTRE LAS CURVAS

$$3 - x = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x \cdot (x - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

A la vista de la gráfica, vemos que el área pedida puede calcularse mediante la integral definida:

$$A = \int_0^3 3 - x - \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = \int_0^3 -x^2 + 3x \, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Bigg]_0^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + \frac{3 \cdot 0^2}{2}\right) = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} u^2$$

PROBLEMA 4: Resuelve el siguiente límite aplicando el Tª Fundamental del Cálculo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{2x} 1-e^{t^2} \; dt}{sen\ x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{2x} 1-e^{t^2} \; dt}{sen\ x} = \left[\begin{array}{l} Sabemos\ que\ una\ propiedad \\ de\ las\ integrales\ definidases: \\ \qquad \int_a^a f(x)\, dx = 0 \\ Por\ tanto: \\ \qquad \int_0^0 1-e^{t^2} \; dt = 0 \end{array} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] = \left[Aplciamos\ L'Hôpital \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} Utilizando\ el\ Teorema\ fundamental \\ del\ cálculo\ integral: \\ F(t) = \int 1-e^{t^2} \; dt \\ entonces: \\ \qquad \int_0^{2x} 1-e^{t^2} \; dt = F(2x) - F(0) \\ Por\ tanto: \\ \left(\int_0^{2x} 1-e^{t^2} \; dt \right)' = F'(2x) - F'(0) = \\ 2 \cdot \left(1-e^{4x^2} \right) - 0 = 2 \cdot \left(1-e^{4x^2} \right) \end{array} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \left(1-e^{4x^2} \right)}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

PROBLEMA 5:Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) La función $f(x) = 4x + 5$ tiene infinitas primitivas

b) Del mismo modo que dos funciones pueden tener la misma derivada, hay funciones que pueden tener la misma primitiva.

c) Si dos funciones $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$ en un intervalo entonces se cumple que $F(x) = G(x) + C$ donde C es una constante.

d) Una función no puede ser nunca primitiva de sí misma.

e) Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ entonces necesariamente tiene que ocurrir que $a = b$

a) **Verdadero**. Si observamos:

$$\int 4x + 5\,dx = x^2 + 5x + C \qquad con\ C \in R$$

Así pues, para cada valor que adopte la constante C (que son infinitos valores posibles) se obtiene una primitiva diferente.

b) **Falso**. Lo probaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ distintas pero con la misma primitiva, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \int f(x)\,dx \\ G(x) = \int g(x)\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F(x) = G(x)$$

Si derivamos ahora la igualdad:

$$F(x) = G(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x) = G'(x) \quad \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Es decir las funciones $f(x)$ y $g(x)$ deberían ser iguales y esto entra en contradicción con nuestra hipótesis inicial.

Como conclusión: no existen dos funciones diferentes que tengan la misma primitiva.

c) **Verdadero**, pues sabemos que dos primitivas de una función únicamente se diferencian por una constante. Así pues, si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$ en un intervalo dado, se tiene que:

$$F(x)-G(x)=C \quad \Rightarrow \quad F(x)=G(x)+C$$

d) **Falso**. Basta considerar la función constante $f(x)=0$ o la función exponencial $g(x)=e^x$ para ver que la afirmación es falsa:

$$\int 0\,dx = 0+C \qquad con\ C\in R$$

$$\int e^x\,dx = e^x+C \qquad con\ C\in R$$

e) **Falso**. Sabemos que si a=b, la integral definida valdrá cero, pero no tiene por qué cumplirse el recíproco. Basta considerar el siguiente ejemplo:

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

pero los extremos de la integral definida no son iguales.