DOSSIER SEMANAL 13

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Sea A una matriz cuadrada tal que verifica la relación $A^2 - 7A = 5I$, donde I es la matriz identidad. Se pide, calcular razonadamente:

a) Los **valores** reales de a y b para que $A^{-1} = aA + bI$

b) Los **valores** reales de p y q para que $A^4 = pA + qI$

c) El **determinante** de la matriz $[(2 \cdot B^{-1})^2]^T$ sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale 3.

a) Sabemos que la matriz A verifica $A^2 - 7A = 5I$, por tanto:

$$A \cdot (A - 7I) = 5I \quad \rightarrow \quad A \cdot \left[\frac{1}{5}(A - 7I)\right] = I$$

Por tanto, dado que la inversa de una matriz se define como aquella que al multiplicarla por la matriz proporciona la matriz identidad, concluimos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 7I) \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{5}A - \frac{7}{5}I$$

Concluimos así que los valores reales de los parámetros a y b serán: $a = \frac{1}{5}$ y b= $\frac{-7}{5}$

b) Si calculamos la potencia de A propuesta observamos que: $A^2 = 7A + 5I$. Así pues:

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (7A + 5I) \cdot (7A + 5I) = 49A^2 + 35A + 35A + 25I^2 =$$
$$= 49 \cdot (7A + 5I) + 70A + 25I = 343A + 245I + 70A + 25I =$$
$$= 413A + 270I$$

Por tanto, comparando expresiones, concluimos que: $p = 413$ y $q = 270$

c) Haciendo uso de las propiedades de los determinantes, observamos que:

$$|[(2 \cdot B^{-1})^2]^T| = \begin{bmatrix} Propiedad \\ |A| = |A^T| \end{bmatrix} = |(2 \cdot B^{-1})^2| = \begin{bmatrix} Propiedad \\ |A^a| = |A|^a \end{bmatrix} = |2 \cdot B^{-1}|^2$$
$$= \begin{bmatrix} Propiedad \\ |kA| = k^n|A| \\ siendo\ n\ la \\ dimensión\ de\ A \end{bmatrix} = (2^2 \cdot |B^{-1}|)^2 = \begin{bmatrix} Propiedad \\ |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \end{bmatrix} =$$
$$= 2^4 \cdot \left(\frac{1}{|B|}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

Pedro A. Martínez Ortiz
www.maths4everything.com
@maths4everthink

PROBLEMA 2: Calcula el valor de los siguientes **límites**:

a) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{4x^5-3x^3+2x^2-3}{\sqrt{x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{x}{x^2-4}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x^2-x}{3x^2+5}\right)^{x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

a) Este límite presenta indeterminación 0/0:

$$\lim_{x\to 1+} \frac{4x^5-3x^3+2x^2-3}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\ IND\right] = \lim_{x\to 1+} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot(4x^5-3x^3+2x^2-3)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot(4x^5-3x^3+2x^2-3)}{x-1} = \begin{bmatrix} Factorizamos\ el\ polinomio \\ del\ numerador\ mediante \\ Ruffini \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot(x-1)\cdot(4x^4+4x^3+x^2+3x+3)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1+} \left(\sqrt{x}-1\right)\cdot(4x^4+4x^3+x^2+3x+3) = 0\cdot 15 = 0$$

b) Este límite presenta inicialmente una indeterminación del tipo $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{3x}{x-2}-\frac{x}{x^2-4}\right) = [\infty-\infty\ \ IND] = \begin{bmatrix} Dado\ que\ no\ tiene\ raíces \\ realizaremos\ la\ resta \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \left(\frac{3x\cdot(x+2)}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to 2} \left(\frac{3x^2+6x-x}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to 2} \left(\frac{3x^2+5x}{x^2-4}\right) = \left[\frac{22}{0}\ IND\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} Hemos\ de\ calcular \\ los\ límites\ laterales \\ para\ ver\ si\ coinciden \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2+} \left(\dfrac{3x^2+5x}{x^2-4}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2-} \left(\dfrac{3x^2+5x}{x^2-4}\right) = -\infty \end{array} \right. = \nexists$$

c) Este límite es del tipo 1^{∞}:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x^2-x}{3x^2+5}\right)^{x+2} = [1^{\infty}\ \ IND] = e^L$$

$$L = \lim_{x\to +\infty} (x+2)\cdot\left(\frac{3x^2-x}{3x^2+5}-1\right) = \lim_{x\to +\infty} (x+2)\cdot\left(\frac{3x^2-x-3x^2-5}{3x^2+5}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} (x+2)\cdot\left(\frac{-x-5}{3x^2+5}\right) = \lim_{x\to +\infty} -\frac{x^2+7x+10}{3x^2+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\ IND\right] = -\frac{1}{3}$$

Así pues:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x^2-x}{3x^2+5}\right)^{x+2} = e^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

d) Este límite no existe ya que **el límite por la izquierda de cero no está definido** para la función raíz cuadrada que aparece en el denominador. Únicamente podríamos calcular el límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \left[\frac{0}{1}\right] = 0$$

PROBLEMA 3: Enuncia el **Teorema de Bolzano**. Tras ello, utiliza este teorema para demostrar que la ecuación

$$3x + cosx = e^x$$

tiene (al menos) una solución en el intervalo abierto $(-2,1)$.

Enunciemos primeramente el Teorema de Bolzano:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y verifica además que $f(a)\cdot f(b)<0$ (es decir, la función toma valores de signo opuesto en los extremos) entonces existe al menos un punto que llamaremos c del intervalo abierto (a,b) donde la función $f(x)$ se anula. Expresando la tesis matemáticamente:

$$\exists c \in (a,b) \mid f(c)=0$$

Vamos ahora a atender a la segunda parte del ejercicio. Comprobar si la ecuación:

$$3x + cosx = e^x$$

tiene alguna solución real equivale a comprobar que la ecuación equivalente:

$$3x + cosx - e^x = 0$$

tiene solución real. Definimos, por tanto, la función:

$$f(x) = 3x + cosx - e^x$$

y procederemos a comprobar que verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano:

1) $f(x)$ es una función continua en todo R por ser composición de funciones continuas en todo R. Así pues, en particular, será continua en cualquier intervalo cerrado que consideremos.

2) Se observa, además, que:

$$\left.\begin{array}{r} f(-2) = 3\cdot(-2) + cos(-2) - e^{-2} < 0 \\ f(1) = 3\cdot 1 + cos(1) - e^{1} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ f(-2)\cdot f(1) < 0$$

Así pues, dado que $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[-2,1]$ y se verifica que $f(-2)\cdot f(1)<0$ podemos concluir que existirá al menos un punto c en el intervalo $(-2,1)$ donde la función vale cero. Matemáticamente:

$$\exists c \in (-2,1) \mid f(c) = 0 \ \Leftrightarrow \ \exists c \in (-2,1) \mid 3c + cos(c) = e^{c}$$

Con ello queda demostrado que la ecuación propuesta tiene al menos una solución real en el intervalo abierto $(-2,1)$

PROBLEMA 4: Determina la recta **perpendicular común** a las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \quad con\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad\qquad s \equiv \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases}$$

Primeramente, determinaremos la posición relativa de ambas rectas. Vamos a extraer primeramente un vector director y un punto de cada una de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \quad con\ \alpha \in \mathbb{R} \ \rightarrow \ \begin{cases} P_r = (1,2,3) \\ \overrightarrow{u_r} = (-2,1,-1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \ s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \ \ con\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8 + 6\lambda \end{cases} \rightarrow \ \begin{cases} P_s = (0,5,8) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,2,6) \end{cases}$$

A la vista de los vectores directores, podemos concluir que las rectas no serán paralelas o coincidentes ya que los vectores no son proporcionales. En consecuencia, veamos se cruzan o si son secantes:

$$\det(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Así pues, las rectas r y s son secantes. Para calcular la perpendicular común necesitaremos determinar un vector perpendicular a los vectores directores de ambas y el punto de intersección de ambas rectas. Con este vector y punto podremos construir la perpendicular común:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (8, 11, -5)$$

El punto de corte será el resultado de resolver el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de ambas rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 1 - 2\alpha = \lambda \\ 2 + \alpha = 5 + 2\lambda \\ 3 - \alpha = 8 + 6\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \quad \alpha = 1 \quad \lambda = -1 \quad \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación de la recta perpendicular común será:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 8\beta \\ y = 3 + 11\beta \\ z = 2 - 5\beta \end{cases} \quad con\ \beta \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA 5: **Determina** los valores de los parámetros reales a y b para que la función $f(x)$ sea continua y para que $f(-2) = f(-2/3)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{ax}{x+2} & si\ x > 1 \end{cases}$$

En primer lugar, analizamos y calculamos el dominio de la función por si existiera algún punto problemático donde debiéramos dedicar especial atención.

- En el primer tramo, la función es una función polinómica y en consecuencia no presenta problemas de dominio.

- El segundo tramo presenta problemas de definición cuando el denominador sea cero. Es decir, cuando $x = -2$. No obstante, dado que esta función sólo se considera cuando $x > 1$, podemos concluir que no presenta problemas de dominio.

En conclusión, el dominio de la función $f(x)$ es todo el conjunto de los números reales. Así mismo, la función propuesta será continua en todo su dominio salvo a lo sumo en los puntos de cambio, transacción o soldadura:

Por tanto, sólo nos resta analizar los puntos de cambio:

- Para $x = 1$

$$f(1) = 1^2 + a \cdot 1 + b = a + b + 1$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{ax}{x+2} = \frac{a}{3}$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} x^2 + ax + b = a + b + 1$$

Si queremos que la función sea continua deberá suceder que:

$$f(1) = \lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x)$$

Es decir:

$$\frac{a}{3} = a + b + 1 \quad \rightarrow \quad a = 3a + 3b + 3 \quad \rightarrow \quad 2a + 3b = -3$$

Ahora bien, también sabemos que la función debe cumplir $f(-2) = f(-2/3)$. Por tanto:

$$f(-2) = (-2)^2 + a \cdot (-2) + b = -2a + b + 4$$

$$f(-2/3) = (-2/3)^2 + a \cdot (-2/3) + b = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}a + b$$

$$\frac{4}{9} - \frac{2}{3}a + b = -2a + b + 4 \quad \rightarrow \quad 4 - 6a + 9b = -18a + 9b + 36 \quad \rightarrow \quad 12a = 32$$

Esto nos lleva a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 3b = -3 \\ 12a = 32 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad a = \frac{8}{3} \quad b = -\frac{25}{9}$$

Por tanto, los valores de los parámetros a y b serán:

$$a = \frac{8}{3} \quad b = -\frac{25}{9}$$

DOSSIER SEMANAL 13

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

Pedro A. Martínez Ortiz
www.maths4everything.com
@maths4everthink