DOSSIER SEMANAL 17

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Enuncia el Teorema de Rolle. A continuación, determina el valor de los parámetros reales *m*, *n* y *p* en la función $f(x)$ para que pueda aplicarse el Teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 7]$. ¿En qué valor o valores se cumple la tesis?

$$f(x)=\begin{cases} x^2+m\cdot x & x\le 3 \\ n\cdot x+p & x>3 \end{cases}$$

Enunciaremos primeramente el Teorema de Rolle para dejar constancia de sus premisas y su tesis o conclusión:

Sea una función $f(x)$ definida en $[a, b]$ que verifica las siguientes tres condiciones:

- $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- $f(x)$ es una función derivable en el intervalo abierto (a, b)
- $f(a)=f(b)$

Entonces existe un punto c interior del intervalo (a, b) donde la derivada de la función se anula, expresándolo matemáticamente:

$$\exists c\in(a, b) \mid f'(c)=0$$

Así pues, **vamos ahora a calcular el valor de los parámetros reales m, n y p para que se cumplan las tres premisas del Teorema de Rolle**. Como puede comprobarse fácilmente, el dominio de la función propuesta en este caso es el conjunto de todos los números reales. Obsérvese que para la función $f(x)$ no presenta problemas de dominio ya que independientemente del tramo seleccionado, la función se corresponde con un polinomio.

La función $f(x)$ debe ser **<u>continua</u>** en el intervalo $[-1, 7]$. Observamos que:

- Para $x<3$: la función $f(x)=x^2+m\cdot x$ que es continua en R por ser un polinomio. En particular, será continua en $-1\le x<3$.

- Para $x > 3$: la función $f(x) = n \cdot x + p$ es continua por ser un polinomio. Así pues, en particular será continua en $3 < x \leq 7$.

Por tanto, el único punto en el que debemos prestar especial detalle para la continuidad es en el punto de cambio $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 3^2 + m \cdot 3 = 9 + 3m \\ \underset{x \to 3^+}{Lim} f(x) = \underset{x \to 3^+}{Lim} n \cdot x + p = 3n + p \\ \underset{x \to 3^-}{Lim} f(x) = \underset{x \to 3^-}{Lim} x^2 + m \cdot x = 9 + 3m \end{array}\right\} \Rightarrow 9 + 3m = 3n + p$$

Ahora bien, la función $f(x)$ también debe ser **derivable** $(-1, 7)$:

- Para $x < 3$: la función $f(x) = x^2 + m \cdot x$ que es derivable en R por ser un polinomio. En particular, será derivable en $-1 < x < 3$.
- Para $x > 3$: la función $f(x) = n \cdot x + p$ es derivable en R por ser un polinomio. En particular, será derivable en $3 < x < 7$.

Por tanto, el único punto en el que debemos prestar especial detalle para la derivabilidad es en el punto de cambio $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + m \cdot x & x \leq 3 \\ n \cdot x + p & x > 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + m & x < 3 \\ n & x > 3 \end{cases}$$

Las derivadas laterales en deben coincidir para asegurar la derivabilidad de $f(x)$ en el intervalo abierto $(-1, 7)$. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3+) = \underset{x \to 3+}{Lim} f'(x) = n \\ f'(3-) = \underset{x \to 3-}{Lim} f'(x) = 6 + m \end{array}\right\} \Rightarrow f'(3+) = f'(3-) \Rightarrow n = 6 + m$$

La tercera condición que debe verificar la función $f(x)$ es que $f(-1) = f(7)$. Es decir:

$$f(-1) = f(7) \Rightarrow 1 - m = 7n + p$$

Estableciendo ahora un sistema de ecuaciones con las relaciones obtenidas podemos calcular los valores de los parámetros que nos piden:

$$\left.\begin{array}{l} 9+3m=3n+p \\ n=6+m \\ 1-m=7n+p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9+3m=18+3m+p \\ 1-m=42+7m+p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9=18+p \\ 0=41+8m+p \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p=-9 \\ m=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow n=6-4=2$$

Así pues, p**ara que pueda aplicarse el Teorema de Rolle a la función** $f(x)$ **en el intervalo** $[-1,7]$ **debe cumplirse que** $m=-4$**,** $n=2$ **y** $p=-9$**.**

Determinemos ahora en qué punto/s se verifica la tesis:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\le 3 \\ 2x-9 & x>3 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & x<3 \\ 2 & x>3 \end{cases}$$

Así pues,

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ 2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2\neq 0 \end{cases}$$

Por tanto, el único punto donde se verifica la tesis del Teorema de Rolle es $x=2$

PROBLEMA 2: Considera la matriz cuadrada: $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

a) **Comprueba** que la matriz A verifica la relación $A^2+4\cdot(A+I)=0$.

b) **Demuestra** que la matriz A no es singular**.**

c) **Calcula** la matriz A^{-1}

d) **Calcula**, los valores reales de x e y para los cuales se verifica que:

$$A^{-1}=xA+yI$$

a) Comprobemos que la matriz propuesta verifica la relación sugerida:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & -8\\ -12 & 16 & -24\\ -4 & 4 & -4\end{pmatrix}$$

$$4\cdot(A+I)=4\cdot\left[\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=4\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & -4 & 6\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4 & 8\\ 12 & -16 & 24\\ 4 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

Así pues, se observa fácilmente que:

$$A^2+4\cdot(A+I)=\begin{pmatrix}0 & 4 & -8\\ -12 & 16 & -24\\ -4 & 4 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -4 & 8\\ 12 & -16 & 24\\ 4 & -4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) Basta con calcular su determinante y observar que no es cero:

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-6-6+10-6=-8\neq 0$$

En consecuencia la matriz A no es singular.

c) Podría calcularse mediante el uso del procedimiento por determinantes o el método de Gauss-Jordan. No obstante, aquí lo haremos de forma más rápida aprovechando que la matriz A verifica la relación propuesta en el apartado a). Basta con observar que:

$$A^2+4\cdot(A+I)=0 \quad\Rightarrow\quad A^2+4A+4I=0 \quad\Rightarrow\quad A^2+4A=-4I \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A\cdot(A+4I)=-4I \Rightarrow \quad A\cdot\left(\frac{A+4I}{-4}\right)=I \Rightarrow \quad A^{-1}=-\frac{1}{4}\cdot(A+4I)$$

Por tanto:

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\cdot(A+4I)=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

d) Comparando las expresiones:

$$A^{-1}=x\,A+y\,I$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\cdot(A+4I)=-\frac{1}{4}\cdot A-I$$

Observamos fácilmente que:

$$x=-\frac{1}{4} \qquad y=-1$$

PROBLEMA 3: Demuestra que cualquier matriz puede expresarse como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Dada una matriz cuadrada A cualquiera, podemos construir las matrices:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left(A+A^T\right) \qquad H=\frac{1}{2}\cdot\left(A-A^T\right)$$

Se observa fácilmente que la matriz S es simétrica:

$$S^T=\left[\frac{1}{2}\cdot\left(A+A^T\right)\right]^T=\frac{1}{2}\cdot\left(A^T+\left(A^T\right)^T\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(A^T+A\right)=S \quad\Rightarrow\quad S^T=S$$

Del mismo modo se comprueba que H es antisimétrica:

$$H^T=\left[\frac{1}{2}\cdot\left(A-A^T\right)\right]^T=\frac{1}{2}\cdot\left(A^T-\left(A^T\right)^T\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(A^T-A\right)=-H \quad\Rightarrow\quad H^T=-H$$

Además, si sumamos ambas matrices se observa que:

$$S+H=\left[\frac{1}{2}\cdot\left(A+A^T\right)\right]+\left[\frac{1}{2}\cdot\left(A-A^T\right)\right]=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A^T=A$$

Con lo que queda demostrado que cualquier matriz cuadrada puede descomponerse como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

DOSSIER SEMANAL 17

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 4: Se sabe que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales. Además, verifican que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=7$ y $\|\vec{u}+\vec{v}\|=5$. Halla el módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Dado que:

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=7 \quad\Rightarrow\quad \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{v}=7 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=7 \quad\Rightarrow\quad \|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=7$$

Y como:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|=5 \quad\Rightarrow\quad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2=25 \quad\Rightarrow\quad (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=5 \quad\Rightarrow\quad \vec{u}\cdot\vec{u}+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=5$$

Pero como los vectores u y v son ortogonales (es decir, su producto escalar es cero):

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=25 \quad\Rightarrow\quad \vec{u}\cdot\vec{u}+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=25 \quad\Rightarrow\quad \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=25 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2=25$$

Realizando un sistema de ecuaciones, obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=7 \\ \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2=25 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \|\vec{u}\|=4 \quad \|\vec{v}\|=3$$