SOLUCIONES

DOSSIER SEMANAL 1

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-6x+3}{4x^2+x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[Ln\left(\dfrac{x+2}{x^3}\right)-Ln\left(\dfrac{3x-1}{x^2}\right)\right]$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-6x+3}{4x^2+x-5}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\Rightarrow INDETERMINACIÓN$

Para resolver esta indeterminación factorizaremos ambos polinomios y tras ello, simplificaremos la expresión que aparece en el límite. Utilizando Ruffini observamos:

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -6 & 3 \\ 1 & & 3 & -3 \\ \hline & 3 & -3 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow\ 3x^2-6x+3=3\cdot(x-1)\cdot(x-1)=3\cdot(x-1)^2$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 4 & 1 & -5 \\ 1 & & 4 & 5 \\ \hline & 4 & 5 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow\ 4x^2+x-5=(4x+5)\cdot(x-1)$$

Así pues, el límite propuesto se resuelve como sigue:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-6x+3}{4x^2+x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot(x-1)^2}{(4x+5)\cdot(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot(x-1)}{(4x+5)}=\frac{0}{9}=\boxed{0}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[Ln\left(\dfrac{x+2}{x^3}\right)-Ln\left(\dfrac{3x-1}{x^2}\right)\right]=[\infty-\infty]\Rightarrow INDETERMINACIÓN$

Para resolver esta indeterminación aplicaremos las propiedades de los logaritmos. Como sabemos, la diferencia de logaritmos puede transformarse en el logaritmo de un cociente. Así pues:

$$\lim_{x\to\infty}\left[Ln\left(\frac{x+2}{x^3}\right)-Ln\left(\frac{3x-1}{x^2}\right)\right]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\left[Ln\left(\frac{\frac{x+2}{x^3}}{\frac{3x-1}{x^2}}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[Ln\left(\frac{(x+2)\cdot x^2}{x^3\cdot(3x-1)}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[Ln\left(\frac{x+2}{3x^2-x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}[Ln(0)]=\boxed{-\infty}$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \left[\dfrac{\infty-\infty}{\infty-\infty}\right] \Rightarrow INDETERMINACIÓN$

La indeterminación es una doble indeterminación del tipo infinito menos infinito. Para solventarla, multiplicaremos por el conjugado del denominador y numerador en un mismo paso para agilizar el cálculo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$= \left[\begin{matrix} Usamos\ ahora\ la\ identidad\ notable \\ (a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2 \end{matrix}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1-2x+1)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{(x+1-x+1)\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{2\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1+1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

PROBLEMA 2: Calcula el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ de dos formas distintas:

a) Utilizando relaciones trigonométricas y la igualdad $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

b) Aplicando directamente infinitésimos equivalentes.

a) Existen distintas alternativas posibles para resolver este límite utilizando relaciones trigonométricas. Utilizaremos una de las más sencillas, aunque más artificial en contraposición.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\begin{matrix} Multiplicamos\ numerador\ y \\ denominador\ por\ (1+\cos x) \end{matrix}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{x^2\cdot(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)} = \left[Dado\ que\ \operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x = 1\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{(1+\cos x)} = 1^2\cdot\frac{1}{1+\cos 0} = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Como hemos visto, las funciones $1-\cos x$ y $x^2/2$ son infinitésimos equivalentes en un entorno de cero, en consecuencia, podemos escribir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

PROBLEMA 3: El equipo de investigación de microbiología de Universidad de Harvad está estudiando el efecto de la bacteria *Clostridium Botulinum* en el tratamiento de afecciones neuromusculares. Para poder llevar a cabo su experimento, es necesario que la desvitrificación de las bacterias se realice de manera adecuada y no dañe su función metabólica. Así pues, para asegurarse de que el proceso de reanimación celular se ha ejecutado correctamente, extraen un 5% de las bacterias desvitrificadas y observan su crecimiento durante 7 horas en un cultivo específico. De este experimento previo se genera un modelo de regresión matemático que explica la evolución del peso de dichas bacterias y que viene dado por la función *f(x)* en picogramos:

$$f(x)=\frac{1.25}{1+0.9\cdot e^{-0.04x}}$$

donde x es el tiempo transcurrido en horas desde que se extrae la colonia inicial. Se sabe que un conjunto de bacterias son aptas para la experimentación si al cabo de dos días su peso oscila entre 0.90 y 1.15 picogramos y si con el trascurso del tiempo nunca llega a alcanzar los 1.3 picogramos. Teniendo esto en cuenta, ¿son aptas las bacterias extraídas para la experimentación del equipo de microbiología?

Simplemente se trata de comprobar si se verifican las dos condiciones exigidas por el equipo de investigación para clasifica a las bacterias como "aptas". Estas condiciones son:

1. Al cabo de dos días (48 horas) su peso debe oscilar entre 0.90 y 1.15 picogramos. Comprobemos qué peso adquieren al cabo de dos días:

$$f(48)=\frac{1.25}{1+0.9\cdot e^{-0.04\cdot 48}}=\frac{1.25}{1+0.9\cdot 0.146}=\frac{1.25}{1.13}=\boxed{1.104\ \ picogramos}$$

Así pues, observamos que se cumple la primera condición, ya que:

$$0.90<f(48)=1.104<1.15$$

2. Con el trascurso del tiempo el peso nunca debe llega a alcanzar los 1.3 picogramos. Comprobemos a qué valor tiende el peso de las bacterias a medida que avanza el tiempo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1.25}{1+0.9\cdot e^{-0.04x}} = \frac{1.25}{1+0.9\cdot e^{-0.04\cdot(+\infty)}} = \frac{1.25}{1+0.9\cdot e^{-\infty}} = \frac{1.25}{1+0.9\cdot 0} = \boxed{1.25}$$

   Es decir, (dado que la función es creciente) el peso de las bacterias no superará nunca los 1.25 picogramos, lo cual hace que también cumpla el segundo requisito.

Así pues, dado que ambas condiciones exigidas se cumplen para la colonia de bacterias seleccionadas, **podemos afirmar que éstas son aptas para el estudio** de las afecciones neuromusculares en el que trabaja el equipo de microbiología de la Universidad de Harvad.