DOSSIER SEMANAL 14

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Determina el **valor de los parámetros** reales n y m para que la función $f(x)$ sea continua. ¿Existe algún valor de n y m que haga derivable a $f(x)$?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\,sen\,x}{x}+m & x<0 \\ n & x=0 \\ xe^{x}+m^{2} & x>0 \end{cases}$$

En primer lugar, analizamos y calculamos el dominio de la función por si existiera algún punto problemático donde debiéramos dedicar especial atención.

- El primer tramo sólo presentaría problemas en $x=0$, pero dado que la función $\dfrac{2\,sen\,x}{x}+m$ se considera sólo cuando $x<0$, podemos decir que este tramo no presenta problemas de dominio.
- El segundo y tercer tramo tienen como dominio todo R.

Como conclusión, el dominio de la función completa $f(x)$ es R.

Realicemos ahora el estudio detallado de la continuidad:

- Para $x<0$: La función en este tramo es continua en todo R menos en el cero. No obstante, dado que $x=0$ no forma parte del dominio, podemos decir que $f(x)$ es continua en $x<0$.

- Para $x>0$: La función es continua en todo R por ser composición de funciones continuas. En particular será continua en $x>0$.

Por tanto, los únicos puntos que requieren especial atención con respecto a la continuidad son los puntos de cambio, transición o soldadura:

- Para $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=n \\ \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{2\,sen\,x}{x}+m=2+m \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} xe^{x}+m^{2}=m^{2} \end{array}\right\} \Rightarrow n=2+m=m^{2}$$

Así pues:

$$2+m=m^2 \quad \Rightarrow \quad m^2-m-2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

Por tanto, si queremos que **la función sea continua**, **los parámetros m y n pueden adoptar los valores**:

$$\begin{cases} m=-1 \quad y \quad n=2+m=2-1=1 \\ m=2 \quad y \quad n=2+m=2+2=\ 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \quad y \quad n=1 \\ m=2 \quad y \quad n=\ 4 \end{cases}$$

De estas dos posibilidades, ahora queremos averiguar si alguna de ellas hace derivable la función $f(x)$. Estudiemos la derivabilidad en general:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\,sen\ x}{x}+m & x<0 \\ n & x=0 \\ xe^x+m^2 & x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2x\cos\ x-2senx}{x^2} & x<0 \\ 1\cdot e^x+xe^x & x>0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2\left(x\cos\ x-senx\right)}{x^2} & x<0 \\ e^x\cdot(1+x) & x>0 \end{cases}$$

Como vemos, la derivada no depende de ningún parámetro. Así mismo, si calculamos las derivadas laterales en $x=0$, vemos que:

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0+} e^x\cdot(1+x)=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0-}\frac{2\left(x\cos\ x-senx\right)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[L'Hôpital\right]=\lim_{x\to 0-}\frac{2\left(\cos\ x-x\cdot sen\ x-\cos x\right)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{-x\cdot sen\ x}{x}=\lim_{x\to 0-}-sen\ x=0$$

Por tanto, la función **no será nunca derivable**, valgan lo que valgan los parámetros reales m y n.

PROBLEMA 2: **Calcula la función derivada** de las siguientes funciones reales de variable real, simplificando el resultado al máximo:

a) $f(x) = arctg\,\dfrac{1-x}{1+x} - arctg\,x$ b) $f(x) = Ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

a) La función derivada de la función propuesta en el primer apartado será:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{-2}{1+x^2+2x+1+x^2-2x} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{-2}{2+2x^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{-2}{2\cdot(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{-1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{-2}{1+x^2}$$

b) Si intentamos derivar la función directamente, puede complicarse bastante el desarrollo. No obstante, si aplicamos previamente las propiedades de los logaritmos, conseguiremos simplificar el cálculo:

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{Ln}\sqrt{\frac{1-\cos \mathrm{x}}{1+\cos \mathrm{x}}} = \frac{1}{2}\cdot Ln\left(\frac{1-\cos \mathrm{x}}{1+\cos \mathrm{x}}\right) = \frac{1}{2}\cdot [Ln(1-\cos \mathrm{x}) - Ln(1+\cos \mathrm{x})]$$

Así pues, derivando la expresión obtenida:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{1-\cos \mathrm{x}}\cdot sen\, x - \frac{1}{1+\cos \mathrm{x}}\cdot(-sen\, x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{sen\, x}{1-\cos \mathrm{x}} + \frac{sen\, x}{1+\cos \mathrm{x}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(1+\cos \mathrm{x})\cdot sen\, x + (1-\cos \mathrm{x})\cdot sen\, x}{(1-\cos \mathrm{x})\cdot(1+\cos \mathrm{x})}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{sen\, x + \cos \mathrm{x}\cdot sen\, x + sen\, x - \cos \mathrm{x}\cdot sen\, x}{1-\cos^2 \mathrm{x}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2\, sen\, x}{1-\cos^2 \mathrm{x}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\, sen\, x}{\mathrm{sen}^2\, \mathrm{x}} =$$

$$= \frac{sen\, x}{\mathrm{sen}^2\, \mathrm{x}} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{sen\, x}}$$

PROBLEMA 3: Considera la siguiente matriz cuadrada de orden 3 dada por:

$$Z(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4x^4 \\ x & 3 & x+2 \\ 1 & 1 & 4x^4+5 \end{pmatrix} \quad con\ x\in R$$

a) **Demuestra que solo existe al menos un valor** del parámetro real x para el cual la matriz propuesta es singular.

b) **Resuelve** la ecuación matricial $I+X\cdot Z(0)=3\cdot Z(1)$

c) **Calcula** el determinante de la matriz $2\cdot Z(0)\cdot\left[Z^3(1)\right]^T$

a) Para ello, primeramente deberemos calcular el determinante de la matriz $Z(x)$. Utilizaremos la regla de Sarrus pero previamente aplicaremos algunas propiedades de los determinantes para facilitar el cálculo:

$$|Z(x)|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4x^4 \\ x & 3 & x+2 \\ 1 & 1 & 4x^4+5 \end{vmatrix} \underset{F3'=F3-F1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4x^4 \\ x & 3 & x+2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{C3'=C3-C1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4x^4-1 \\ x & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$=15-x\cdot\left(4x^4-1\right)+2-10x=-4x^5-9x+17$$

Ahora debemos demostrar que sólo existe un valor para el cual el determinante de la matriz se anula.

$$-4x^5-9x+17=0$$

Dado que se trata de una ecuación para la cual no disponemos de herramientas para su resolución, nos limitaremos a demostrar simplemente que tiene al menos una solución haciendo uso del teorema de Bolzano. **Recordemos** que **el Teorema de Bolzano** dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y verifica además que $f(a)\cdot f(b)<0$ (es decir, la función toma valores de signo opuesto en los extremos) entonces existe al menos un punto que llamaremos c del intervalo abierto (a,b)donde la función $f(x)$ se anula. Expresando la tesis matemáticamente:

$$\exists c \in (a,b) \mid f(c)=0$$

Así pues, definimos la función:

$$f(x) = -4x^5 - 9x + 17$$

Podemos ver que:

- La función $f(x)$ es continua en todo R por ser un polinomio y en consecuencia será continua en cualquier intervalo cerrado que consideremos. En particular lo será en $[1,2]$.
- Vemos que toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo sugerido:

$$f(1) = -4 - 9 + 17 = 4 > 0$$
$$f(2) = -128 - 18 + 17 = -129 < 0$$

Así pues, por el Teorema de Bolzano podemos concluir que:

$$\exists c \in (1,2) \mid f(c)=0$$

Por todo ello, podemos asegurar que la ecuación $-4x^5 - 9x + 17 = 0$ tiene al menos una solución, es decir, la matriz $Z(x)$ es singular para algún valor real de x (que se encuentra en el intervalo $(1,2)$).

b) Resolvamos la ecuación matricial propuesta:

$$I + X \cdot Z(0) = 3 \cdot Z(1) \quad \Rightarrow \quad X \cdot Z(0) = 3 \cdot Z(1) - I$$

Dado que la inversa de existe (tal como hemos comprobado en el apartado anterior) podemos post-multiplicar ambos términos de la ecuación por:

$$X \cdot Z(0) \cdot Z^{-1}(0) = [3 \cdot Z(1) - I] \cdot Z^{-1}(0) \quad \Rightarrow \quad X = [3 \cdot Z(1) - I] \cdot Z^{-1}(0)$$

Calculemos ahora las matrices que se requieren y obtengamos el valor de la matriz X demandada:

$$Z(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot Z(1) - I = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 3 & 9 & 9 \\ 3 & 3 & 27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 3 & 8 & 9 \\ 3 & 3 & 26 \end{pmatrix}$$

Calculemos la inversa de $Z(0)$ utilizando el procedimiento por determinantes:

$$Z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |Z(0)| = -4 \cdot 0^5 - 9 \cdot 0 + 17 = 17$$

Aplicaremos la fórmula:

$$Z^{-1}(0) = \frac{Adj^T(Z(0))}{|Z(0)|}$$

Calculamos ahora la matriz de adjuntos:

$$Adj_{11}(Z(0)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13 \qquad Adj_{12}(Z(0)) = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \qquad Adj_{13}(Z(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$Adj_{21}(Z(0)) = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad Adj_{22}(Z(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \qquad Adj_{23}(Z(0)) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$Adj_{31}(Z(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad Adj_{32}(Z(0)) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad Adj_{33}(Z(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

Así pues:

$$Adj(Z(0)) = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ -10 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (Z(0))^{-1} = \frac{Adj^T((Z(0)))}{|(Z(0))|} = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -10 & 4 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo ahora en la expresión de la matriz X obtenemos:

$$X = [3 \cdot Z(1) - I] \cdot Z^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 3 & 8 & 9 \\ 3 & 3 & 26 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -10 & 4 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 22 & 32 \\ 28 & 19 & 23 \\ -33 & 11 & 84 \end{pmatrix}$$

c) Para calcular el determinante de la matriz propuesta, simplemente recurriremos a la utilización de algunas de las propiedades básicas de los determinantes para así facilitarnos el cálculo y ahorrar tiempo:

$$\left|2 \cdot Z(0) \cdot [Z^3(1)]^T\right| = 2^3 \cdot |Z(0)| \cdot |Z^3(1)| = 8 \cdot 17 \cdot |Z(1)|^3$$

Como:

$$|Z(1)| = -4 \cdot 1^5 - 9 \cdot 1 + 17 = 4$$

Tenemos que:

$$\left|2 \cdot Z(0) \cdot [Z^3(1)]^T\right| = 8 \cdot 17 \cdot 4^3 = 8704$$