DOSSIER SEMANAL 13

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Determina la ecuación general del plano α que es perpendicular a la recta $r:(x,y,z)=\lambda\cdot(2,2,3)$ y pasa por el punto $P(1,-1,2)$. Este plano, corta a los ejes de coordenadas OX, OY y OZ en tres puntos A, B y C respectivamente. Estos vértices, junto con O (el origen de coordenadas), conforman un tetraedro. Se pide determinar:

a) Las **coordenadas** de los puntos A, B y C.

b) La **ecuación continua** de la recta que se corresponde con la altura del tetraedro que parte del vértice O.

c) La **distancia** del origen al plano que contiene a la cara ABC del tetraedro

d) El **área** de la cara ABC del tetraedro OABC

e) El **volumen** del tetraedro OABC

a) Para determinar las coordenadas de los puntos A, B y C, necesitamos previamente obtener la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P. El vector normal de este plano será el director de la recta r, por tanto:

$$\alpha \equiv 2x+2y+3z+D=0$$

Para obtener el término independiente, sustituimos el punto P que debe pertenecer a dicho plano:

$$2\cdot 1-2\cdot 1+3\cdot 2+D=0 \quad\rightarrow\quad D=-6$$

Así pues:

$$\alpha \equiv 2x+2y+3z-6=0$$

Ahora ya podemos calcular los vértices del tetraedro:

<u>Vértice A</u> (corte con el eje OX)

$$\left.\begin{array}{r} y=0 \\ z=0 \\ 2x+2y+3z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x=3\ \Rightarrow\ A\,(3,0,0)$$

<u>Vértice B</u> (corte con el eje OY)

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ z=0 \\ 2x+2y+3z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ y=3\ \Rightarrow\ B\,(0,3,0)$$

<u>Vértice C</u> (corte con el eje OZ)

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \\ 2x+2y+3z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ z=2 \ \Rightarrow \ C\,(0,0,2)$$

b) Necesitamos simplemente el vector director de la recta (que coincide con el vector normal del plano obtenido en el apartado a) y con el origen de coordenadas ya podemos escribir su ecuación continua:

$$h \equiv \frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

c) La distancia coincide con la altura del tetraedro. Tenemos varias opciones. Una primera es utilizar la fórmula de la distancia de un punto a un plano deducida en clase. Otra opción, que es la que realizaremos, consiste en hallar el punto de corte entre la altura h y el plano α que contiene a los puntos A, B y C y tras ello hacer el módulo del vector que une dicho punto de corte con el origen de coordenadas.

Punto de corte entre el plano α y la altura h:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv 2x+2y+3z-6=0 \\ h \equiv \begin{cases} x=2\mu \\ y=2\mu \\ z=3\mu \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \ 2\cdot 2\mu+2\cdot 2\mu+3\cdot 3\mu-6=0$$

$$4\mu+4\mu+9\mu-6=0 \ \Rightarrow \ \mu=\frac{6}{17}$$

El punto de corte M entre el plano y la altura es:

$$M\left(\frac{12}{17},\frac{12}{17},\frac{18}{17}\right)$$

Por tanto, la distancia que piden será:

$$\|\overrightarrow{OM}\|=\left\|\left(\frac{12}{17},\frac{12}{17},\frac{18}{17}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{12}{17}\right)^2+\left(\frac{12}{17}\right)^2+\left(\frac{18}{17}\right)^2}=\frac{\sqrt{612}}{17}=\frac{6\sqrt{17}}{17}\ u$$

d) El área de la cara ABC puede obtenerse como la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores AB y AC:

$$A = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|}{2} = \frac{\|(6,6,9)\|}{2} = \frac{\sqrt{36+36+81}}{2} = \frac{\sqrt{153}}{2}\ u^2$$

e) El volumen del tetraedro será la sexta parte del volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores que lo definen:

$$V = \frac{\left|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})\right|}{6} = \frac{18}{6} = 3\ u^3$$

PROBLEMA 2: Enuncia el Teorema de Bolzano. Tras ello, justifica si la ecuación:

$$Ln\left(1+x^2\right)=x^3-1$$

tiene alguna solución real.

Enunciemos primeramente el Teorema de Bolzano:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y verifica además que $f(a)\cdot f(b)<0$ (es decir, la función toma valores de signo opuesto en los extremos) entonces existe al menos un punto que llamaremos c del intervalo abierto (a,b) donde la función $f(x)$ se anula. Expresando la tesis matemáticamente:

$$\exists c\in(a,b) \mid f(c)=0$$

Vamos ahora a atender a la segunda parte del ejercicio. Comprobar si la ecuación:

$$Ln\left(1+x^2\right)=x^3-1$$

tiene alguna solución real equivale a comprobar que la ecuación equivalente:

$$Ln\left(1+x^2\right)-x^3+1=0$$

tiene solución real. Definimos, por tanto, la función:

$$f(x)=Ln\left(1+x^2\right)-x^3+1$$

y procederemos a comprobar que verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano:

1) $f(x)$ es una función continua en todo R por ser composición de funciones continuas en todo R. Así pues, en particular, será continua en cualquier intervalo cerrado que consideremos.

2) Se observa, además, que:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=Ln\left(1+0^2\right)-0^3+1=1>0 \\ f(2)=Ln\left(1+2^2\right)-2^3+1\approx-5.39<0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\cdot f(2)<0$$

Así pues, dado que $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[0, 2]$ y se verifica que $f(0)\cdot f(2)<0$ podemos concluir que existirá al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ donde la función vale cero. Matemáticamente:

$$\exists c \in (0, 2) \mid f(c)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in (0, 2) \mid Ln\left(1+c^2\right)-c^3+1=0$$

Con ello queda demostrado que la ecuación propuesta tiene al menos una solución real en el intervalo abierto $(0, 2)$.

PROBLEMA 3: Calcula el valor de los parámetros reales a y b para que la función f(x) sea continua en todo el conjunto de los números reales.

$$f(x)=\begin{cases} ax+4 & si\ x\leq -1 \\ \left|x^2+2x+b\right| & si\ -1<x<1 \\ 1+Ln\ x & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

En primer lugar, analizamos y calculamos el dominio de la función por si existiera algún punto problemático donde debiéramos dedicar especial atención.

- En el primer tramo y segundo tramo, la función es una función polinómica (sin y con valor absoluto, respectivamente) y en consecuencia no presentan problemas de dominio.

- El tercer tramo presenta problemas de definición cuando el argumento del logaritmo sea negativo o cero. Es decir: $x\leq 0$. No obstante, dado que esta función sólo se considera cuando $x\geq 1$, podemos concluir que no presenta problemas de dominio.

En conclusión, el dominio de la función $f(x)$ es todo el conjunto de los números reales. Por tanto, los únicos puntos que requieren especial atención con respecto a la continuidad son los puntos de cambio, transacción o soldadura:

Realicemos ahora el estudio detallado de la continuidad:

- Para $x<1$: La función $f(x)$ en este tramo es un polinomio. Como sabemos, los polinomios son continuos en todo R. En particular será continua en $x<1$.

- Para $-1<x<1$: La función $f(x)$ en este caso es una composición de funciones continuas en todo R. En particular, será continua en el intervalo indicado de $-1<x<1$.

- Para $x>1$: Aquí, la función $f(x)$ es continua en $x>0$ por ser composición de funciones continuas en $x>0$. De forma particular, será continua en el intervalo indicado de $x>1$.

Ahora sólo nos resta analizar los puntos de cambio:

- Para $x=-1$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=a\cdot(-1)+4=4-a \\ \lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-} ax+4=4-a \\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+} \left|x^2+2x+b\right|=\left|-1+b\right| \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 4-a=\left|-1+b\right|$$

- Para $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1+Ln\,1=1 \\ \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} \left|x^2+2x+b\right|=\left|3+b\right| \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} 1+Ln\,x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 1=\left|3+b\right|$$

Así pues, si queremos que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales deberá cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 4-a=\left|-1+b\right| \\ 1=\left|3+b\right| \end{array}\right\}$$

Comenzando a resolver este sistema por la segunda ecuación observamos que:

$$1=\left|3+b\right| \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 1=3+b \\ -1=3+b \end{cases} \quad\Rightarrow \begin{cases} b=-2 \\ b=-4 \end{cases}$$

Es decir, tendremos dos posibles soluciones:

- Si $b=-2 \quad\Rightarrow\quad 4-a=\left|-1-2\right| \quad\Rightarrow\quad 4-a=3 \quad\Rightarrow\quad a=1$
- Si $b=-4 \quad\Rightarrow\quad 4-a=\left|-1-4\right| \quad\Rightarrow\quad 4-a=5 \quad\Rightarrow\quad a=-1$

Así pues, los valores que deben tomar los parámetros reales a y b para que la función sea continua son o bien $a=1$ y $b=-2$, o bien $a=-1$ y $b=-4$.