DOSSIER SEMANAL 12

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Calcula de forma razonada cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2-6x+1}{3-x-2x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{e^{x-5}}{(x-5)^2}$ e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} = \nexists$

Este límite no existe ya que **el límite por la izquierda de cero no está definido** para la función raíz cuadrada que aparece en el denominador. Únicamente podríamos calcular el límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \left[\frac{0}{1}\right] = 0$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2-6x+1}{3-x-2x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \Rightarrow \textit{INDETERMINACIÓN}$

Para resolver esta indeterminación factorizaremos ambos polinomios y tras ello, simplificaremos la expresión que aparece en el límite. Utilizando Ruffini observamos:

$$\begin{array}{r|rrr} & 5 & -6 & 1 \\ 1 & & 5 & -1 \\ \hline & 5 & -1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow 5x^2-6x+1 = (5x-1)\cdot(x-1)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & -2 & -1 & 3 \\ 1 & & -2 & -3 \\ \hline & -2 & -3 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow 3-x-2x^2 = (-2x-3)\cdot(x-1)$$

Así pues, el límite propuesto se resuelve como sigue:

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-6x+1}{3-x-2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(5x-1)\cdot(x-1)}{(-2x-3)\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(5x-1)}{(-2x-3)} = -\frac{4}{5}$$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \textit{INDETERMINACIÓN}$

Para resolver esta indeterminación hemos de comparar el crecimiento del numerador y denominador. Si hacemos esto, observamos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

Otra forma más formal de resolverlo consiste en dividir numerador y denominador entre la x de mayor grado que en este caso es raíz de x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = 1$$

d) $\lim_{x\to 5} \frac{e^{x-5}}{(x-5)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] \Rightarrow INDETERMINACIÓN$

Sabemos que esta indeterminación proporciona como resultado un valor infinito. No obstante, debemos de calcular los límites laterales para poder averiguar el signo del infinito en cada posible dirección:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 5^+} \frac{e^{x-5}}{(x-5)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty \\ \lim_{x\to 5^-} \frac{e^{x-5}}{(x-5)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 5} \frac{e^{x-5}}{(x-5)^2} = +\infty$$

Como los dos límites laterales son iguales, podemos decir que el límite propuesto existe y vale más infinito.

e) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x}} = \left[1^\infty\right] \Rightarrow INDETERMINACIÓN$

Para resolver este tipo de indeterminaciones aplicaremos la conocida fórmula de oro (aunque también podría resolverse aplicando logaritmos neperianos). En esta ocasión haremos uso de la fórmula, más adelante, cuando conozcamos la regla de L'Hôpital lo resolveremos aplicando logaritmos neperianos.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-1\right)\cdot\frac{x^2+3}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1-x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2+3}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2+3}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2+1}} = e$$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \left[\frac{\infty-\infty}{\infty}\right] \Rightarrow INDETERMINACIÓN$

Primeramente debemos resolver la indeterminación $\infty-\infty$. Para ello multiplicaremos y dividiremos por el conjugado del denominador.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= [Simplificamos] = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1$$

PROBLEMA 2: Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-4}{2} = \frac{4-y}{-1} = z \qquad s: \begin{cases} x = 3\lambda - 2 \\ y = 3 \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in R$$

a) Determina su **posición relativa**

b) Calcula el **ángulo** y la **distancia** entre ambas

c) Halla la **perpendicular común** a ambas rectas.

a) Para determinar la posición relativa de dos rectas, extraemos primeramente un punto y un vector director de cada una de ellas. En este caso es fácil ver que:

$\vec{u}_r = (2,1,1) \qquad P_r = (4,4,0)$

$\vec{u}_s = (3,0,1) \qquad P_s = (-2,3,1)$

Así pues, dado que los vectores directores no son proporcionales, podemos asegurar que ambas rectas no serán ni paralelas ni coincidentes. Para averiguar si se cruzan o son secantes, lo que haremos será comprobar si el vector que une los puntos de ambas rectas es coplanario con los directores:

$$\overrightarrow{P_s P_r} = (4,4,0) - (-2,3,1) = (6,1,-1)$$

Para ver si son coplanarios hemos de ver si el determinante es nulo o no:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Dado que el determinante es distinto de cero, podemos afirmar que las rectas r y s se cruzan en el espacio.

b) Para obtener el ángulo de ambas rectas, calcularemos el ángulo formado por sus vectores directores:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{\|\vec{u}_r\| \cdot \|\vec{u}_s\|} = \frac{|6+0+1|}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{9+0+1}} = \frac{7}{\sqrt{60}}$$

Así pues:

$$\alpha = arc\cos\frac{7}{\sqrt{60}} = 25{,}35^{\circ}$$

Así mismo, la distancia entre dos rectas que se cruzan, podría obtenerse mediante el cálculo de la perpendicular común o bien, utilizando la expresión deducida en clase:

$$d(r,s) = \frac{\left|\det(\vec{u}_r,\ \vec{u}_s, \overrightarrow{P_sP_r})\right|}{\|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\|}$$

Dado que el determinante lo hemos calculado en el apartado a), simplemente hemos de averiguar el módulo del producto vectorial de los directores de ambas rectas:

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -3)$$

Así pues:

$$d(r,s) = \frac{\left|\det(\vec{u}_r,\ \vec{u}_s, \overrightarrow{P_sP_r})\right|}{\|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\|} = \frac{10}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{10}{\sqrt{11}} = \frac{10\sqrt{11}}{11}\ u$$

c) Utilizaremos un método constructivo para obtener la perpendicular común a ambas rectas. Calcularemos la perpendicular común como intersección de dos planos secantes. Un primer plano que contiene a la recta r y está también dirigido por la perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x + 7y + z - 12 = 0$$

Otro plano, que contiene a la recta s y está también dirigido por la perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + 10y + 3z - 35 = 0$$

Así pues, la perpendicular común será:

$$t \equiv \begin{cases} -4x + 7y + z - 12 = 0 \\ -x + 10y + 3z - 35 = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 3: Determina los valores de los parámetros reales **a** y **b** para que la función $f(x)$ sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 3a+3^{\frac{2}{x}} & x<-1 \\ \dfrac{4}{2+2^x} & -1\le x\le 1 \\ \dfrac{3}{b-2^{-x}} & x>1 \end{cases}$$

En primer lugar, analizamos y calculamos el dominio de la función por si existiera algún punto problemático donde debiéramos dedicar especial atención.

- En el primer tramo, la función es una función de tipo exponencial y en consecuencia no presentan problemas de dominio, ya que el denominador del exponente sólo se anula para $x=0$ y este valor no entra en el tramo considerado.

- El segundo tramo, la función sólo presentaría problemas si el denominador se anulara, pero esto no es posible ya que lo conforma la suma de dos funciones que son siempre positivas.

- Finalmente, el tercer tramo presentaría problemas si $b-2^{-x}=0$. Es decir:

$$b-2^{-x}=0 \quad\Rightarrow\quad b=2^{-x} \quad\Rightarrow\quad 2^x=\frac{1}{b} \quad\Rightarrow\quad x=Log_2\frac{1}{b}$$

Así pues, la función sólo presentaría problemas de dominio en que es un valor que depende del parámetro real **b**. Así pues, por el momento, consideraremos que el dominio de la función $f(x)$ es todo el conjunto de los números reales. Tras calcular **b** para que la función sea continua, veremos si este valor de **b** proporciona problemas de dominio. Por tanto, los únicos puntos que requieren especial atención con respecto a la continuidad son los puntos de cambio, transición o soldadura:

Realicemos ahora el estudio detallado de la continuidad:

- Para $x<-1$: La función $f(x)$ en este tramo es continua en todo R por ser una función exponencial. En particular será continua en $x<-1$.

- Para $-1<x<1$: La función $f(x)$ en este caso es una composición de funciones continuas en todo R. En particular, será continua en el intervalo indicado de $-1<x<1$.
- Para $x>1$: Aquí, la función $f(x)$ es continua para todo $x \neq Log_2 \frac{1}{b}$. De forma particular, si este valor de x (que depende de **b**) no entra en el tramo considerado, entonces será continua en $x>1$.

Ahora sólo nos resta analizar los puntos de cambio:

- Para $x=-1$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=\dfrac{4}{2+2^{-1}}=\dfrac{8}{5} \\ \lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-} 3a+3^{\frac{2}{x}}=3a+\dfrac{1}{9} \\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{4}{2+2^{x}}=\dfrac{8}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3a+\frac{1}{9}=\frac{8}{5} \Rightarrow \quad 3a=\frac{8}{5}-\frac{1}{9} \Rightarrow \quad a=\frac{67}{135}$$

- Para $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{4}{2+2^{1}}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{4}{2+2^{x}}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{3}{b-2^{-x}}=\dfrac{3}{b-\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 1=\frac{3}{b-\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad b-\frac{1}{2}=3 \Rightarrow \quad b=\frac{7}{2}$$

Sólo faltaría comprobar si el valor de b proporciona problemas de dominio en el tercer tramo donde influye:

$$b-2^{-x}=0 \Rightarrow \frac{7}{2}-2^{-x}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{2}=2^{-x} \quad \Rightarrow \quad 2^{x}=\frac{2}{7} \quad \Rightarrow \quad x=Log_2 \frac{2}{7}<0$$

Dado que el valor problemático no entra en el intervalo, sabemos que el valor de **b** hace posible que la función sea continua.

Así pues, los valores que deben tomar los parámetros reales a y b para que la función sea continua son $a=\frac{67}{135}$ y $b=\frac{7}{2}$.