1 Álgebra de matrices

Página 33

Vuelos internacionales

	B_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

Página 35

1 $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $\quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; $E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Página 36

1 $E = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$

Página 39

2 $A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}$; $\quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$; $\quad C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$

$D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}$; $\quad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

3 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Página 40

1 PROPIEDAD 2:

$$9A = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3A + 6A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix}$$

$9A = 3A + 6A$

PROPIEDAD 3:

$$3(A + B) = 3\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix}$$

$$3A + 3B = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix}$$

$3(A + B) = 3A + 3B$

Página 41

2 $A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}$$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$(B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot D + C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

Página 43

1 a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

2 a) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

Página 45

3 a) $A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix}$$

b) $(A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}$

$$A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}$$

c) $A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix}$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix}$$

4 $X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$

5 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6 $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

7 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, donde x e y son números reales cualesquiera.

8 a) $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $\begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

9 $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

10 a) La inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$. $\qquad$ b) La inversa es $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$.

c) La inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) La inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11 a) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $Y = \begin{pmatrix} -70 & -27 \\ 184 & 71 \end{pmatrix}$

c) $Z = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -7 \\ 2 & -7 & -5 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$

Página 46

1 • *Asociativa:* $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (12, 4, 4) + \vec{w} = (16, 10, 1)$

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + (9, 6, 3) = (16, 10, 1)$

- *Conmutativa:* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

  $\vec{u} + \vec{v} = (12, 4, 4) = \vec{v} + \vec{u}$
- *Vector nulo:* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

  $\vec{v} + \vec{0} = (5, 0, 6) + (0, 0, 0) = (5, 0, 6) = \vec{v}$
- *Vector opuesto:* $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$

  $\vec{v} + (-\vec{v}) = (5, 0, 6) + (-5, 0, -6) = (0, 0, 0)$
- *Asociativa:* $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

  $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = (8 \cdot (-5)) \cdot (5, 0, 6) = -40 \cdot (5, 0, 6) =$

  $= (-200, 0, -240)$

  $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 8 \cdot [-5 \cdot (5, 0, 6)] = 8 \cdot (-25, 0, -30) =$

  $= (-200, 0, -240)$
- *Distributiva I:* $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

  $(a + b) \cdot \vec{v} = 3 \cdot (5, 0, 6) = (15, 0, 18)$

  $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v} = 8 \cdot (5, 0, 6) - 5 \cdot (5, 0, 6) =$

  $= (40, 0, 48) - (25, 0, 30) = (15, 0, 18)$
- *Distributiva II:* $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

  $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 8 \cdot (12, 4, 4) = (96, 32, 32)$

  $a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = 8 \cdot (7, 4, -2) + 8 \cdot (5, 0, 6) =$

  $= (56, 32, -16) + (40, 0, 48) = (96, 32, 32)$
- *Producto por 1:* $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

  $1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (5, 0, 6) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

Página 48

2 Aplicamos la propiedad fundamental:

$x(3, 0, 0, 0) + y(0, 2, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(3, 2, 1, 4) = (0, 0, 0, 0)$

Esta igualdad da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 3t = 0 \\ 2y + 2t = 0 \\ z + t = 0 \\ 4t = 0 \end{array}\right\}\ \text{sus soluciones son: } x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ t = 0$$

Por tanto, los vectores son L.I., pues la única combinación lineal de ellos que da lugar al vector cero es la que se obtiene con coeficientes todos nulos.

3 $$\left.\begin{array}{l} 3x + 3t = 0 \\ 2y + 2t = 0 \\ z + t = 0 \end{array}\right\}\ \text{sus soluciones son: } x = -\lambda,\ y = -\lambda,\ z = \lambda,\ t = \lambda$$

Como hay soluciones distintas de la solución trivial, los vectores son L.D.

4 $$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ -4x + z = 0 \\ 7x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}\ \text{Este sistema tiene como solución única } x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

5 • Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Si hacemos $x = 0,\ y = 0,\ z$ puede tomar cualquier valor, por tanto, los vectores son *linealmente dependientes*.

• Si en un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ está el vector cero, podemos conseguir una combinación lineal de ellos:

$$x_1\vec{u}_1 = x_2\vec{u}_2 + \dots + x_{n-1}\vec{u}_{n-1} + x_n\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

en la que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ y $x_n \neq 0$. Como no todos los coeficientes son nulos, los vectores son linealmente dependientes.

Página 50

1 $ran(A) = 3,\ ran(B) = 2,\ ran(C) = 2,\ ran(D) = 3$

Página 51

1 Hazlo tú.

$$(A + B)^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^t C^t = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t \cdot C^t + B^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La igualdad es cierta.

2 Hazlo tú.

$a = 4$

3 Hazlo tú.

$a_1 = 2,\ a_2 = 1$

Página 52

5 Hazlo tú.

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ \text{con } a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Página 53

6 Hazlo tú.

$A^2 - A = I \to A(A - I) = I \to A - I$ es la inversa de A, luego A es invertible.

7 Hazlo tú.

$$X = 2\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Página 54

9 Hazlo tú.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

10 Hazlo tú.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Página 55

11 Hazlo tú.

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

12 Hazlo tú.

Si $m = -1 \to ran(M) = 2$. Si $m \neq -1 \to ran(M) = 3$.

Página 56

1 $a = \pm 1,\ b = 0$

2 $x_1 = 2,\ y_1 = 2,\ z_1 = -1;\ x_2 = -2,\ y_2 = 2,\ z_2 = 1$

$x_3 = -2,\ y_3 = -2,\ z_3 = -1;\ x_4 = 2,\ y_4 = -2,\ z_4 = 1$

3 $$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

4 Independientemente del valor de t, $ran(M) = 2$.

5 $$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 57

1 $$A_{(3\times 2)} \cdot B_{(2\times 4)} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & -6 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{(2\times 4)} \cdot D_{(4\times 1)} = \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$3B - 2C = \begin{pmatrix} 9 & -10 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$B_{(2\times 4)} \cdot C_{(2\times 4)} \to$ No se pueden multiplicar.

$$D_{(4\times 1)} \cdot D'_{(1\times 4)} = \begin{pmatrix} 25 & -15 & 5 & 10 \\ -15 & 9 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2 a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 20 & -1 \end{pmatrix}$ f) $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$

g) $A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 19 & 2 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$

3 $$A + I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix};\ (A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ A^2 = -2A - I$$

4 N es la inversa de A.

5 $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\ B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix};\ C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6 a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - 0 = I$

7 a) $$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

b) $$A^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

8 $$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix};\ A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $A^{10} = -A$

Página 58

9 $ran(A) = 2;\ ran(B) = 2;\ ran(C) = 1;\ ran(D) = 2;\ ran(E) = 3;\ ran(F) = 3$

10 $ran(A) = 3 \to$ 3 columnas L.I. en A.

$ran(B) = 2 \to$ 2 columnas L.I. en B.

$ran(C) = 2 \to$ 2 columnas L.I. en C.

$ran(D) = 4 \to$ Las cuatro columnas de D son L.I.

11 • Si $m \neq -1 \to ran(A) = 3$. Si $m = -1 \to ran(A) = 2$

• Si $m \neq 3$ y $m \neq -2 \to ran(B) = 3$

Si $m = 3,\ m = -2 \to ran(B) = 2$

• Si $m = 0$ o $m = -3$, $ran(C) = 1$ y si $m \neq 0$ o $m \neq -3$, $ran(C) = 2$.

• Si $m \neq 0 \to ran(D) = 3$. Si $m = 0 \to ran(D) = 2$

• Si $m \neq \frac{1}{2} \to ran(E) = 2$. Si $m = \frac{1}{2} \to ran(E) = 1$

• Si $m = 2 \to ran(F) = 2$. Si $m = 1 \to ran(F) = 2$

Si $m = -1 \to ran(F) = 2$

Si $m \neq 2,\ m \neq 1$ y $m \neq -1 \to ran(F) = 3$

12 $$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

13 $x = \frac{-5}{4};\ y = \frac{-7}{4}$

14 $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

15 $$X = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

16 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

17 a) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3/2 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

c) M debe tener dimensión 3×3.

d) N debe tener dimensión 3×2.

18 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$

19 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

20 a) $X = B(A - C)^{-1}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$

21 a) $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 34 & 21 \end{pmatrix}$

22 a) $A^2 = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & -x - y \\ x + y & y^2 - 1 \end{pmatrix}$ b) $y = 0$, $x = 2$

23 a) Existe B^{-1} si $m \neq 0$. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

24 a) $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A - I = A(A - I) \to A - I = A^2 - A \to -A^2 + 2A = $
$= I \to A(-A + 2I) = I$

c) Llamamos $B = A - I$. $B^2 = \mathbf{0}$

Si B fuera invertible, $B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \cdot B^{-1} = \mathbf{0}$

Además, cualquier matriz cumple que:

$B^2 \cdot B^{-1} = B \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot I = B$

Tendríamos entonces que:

$\left.\begin{matrix} B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \\ B^2 \cdot B^{-1} = B \end{matrix}\right\} \to B = \mathbf{0}$, lo cual es falso.

Por tanto, $B = A - I$ no es invertible.

d) $\lambda = -1$

25 $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Página 59

26 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

27 $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $A^3 = I$; $A^{128} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

28 $k = 1$

29 $ran(M) = 3$ para cualquier valor de k

- Si $k = -\frac{1}{2} \to ran(N) = 2$
- Si $k \neq -\frac{1}{2} \to ran(N) = 3$
- Si $k = -2 \to ran(P) = 1$
- Si $k \neq -2 \to ran(P) = 2$
- Si $k = 2 \to ran(Q) = 2$
- Si $k \neq 2 \to ran(Q) = 3$

30 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

31 $X = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$

32 a) $a = b = c$ b) $B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

33 Hay dos soluciones:

$x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = \frac{4}{5}$; $x_2 = -\frac{4}{5}$, $y_2 = -\frac{4}{5}$

34 $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

35 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

36 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & 7/5 \end{pmatrix}$

37 a) $X = A^{-1} \cdot 2B = 2A^{-1}B$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

38 a) $C = \begin{array}{c} \text{Hoj.} \\ \text{Can.} \\ \text{Ac.} \\ \text{Sal} \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}05 \\ 0{,}04 \\ 0{,}001 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 44\,750 & 19\,000 & 34\,250 & 5\,500 \\ 46\,300 & 20\,100 & 36\,000 & 5\,950 \end{pmatrix}$

La matriz que hemos obtenido, AB, expresa, por filas, la cantidad, en gramos, de cada uno de los materiales necesarios para fabricar todas las latas que demandan los almacenes.

$BC = \begin{pmatrix} 4{,}41 \\ 7{,}115 \\ 6{,}06 \end{pmatrix}$

La matriz BC representa el coste de los materiales utilizados en una unidad de cada tipo de lata L_1, L_2, L_3.

$ABC = \begin{pmatrix} 2\,773 \\ 2\,913{,}95 \end{pmatrix}$

Este último producto de matrices, ABC, nos indica el coste, en materiales de fabricación, de todas las latas que demanda cada uno de los dos almacenes.

39 a) $\begin{array}{c|cc} & P & G \\ \hline L3 & 4 & 3 \\ L4 & 5 & 4 \\ L5 & 6 & 5 \end{array}$; $\begin{array}{c|cc} & C & B \\ \hline P & 2 & 4 \\ G & 4 & 6 \end{array}$

b) $\begin{array}{c|cc} & P & G \\ \hline L3 & 4 & 3 \\ L4 & 5 & 4 \\ L5 & 6 & 5 \end{array} \cdot \begin{array}{c|cc} & C & B \\ \hline P & 2 & 4 \\ G & 4 & 6 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & C & B \\ \hline L3 & 20 & 34 \\ L4 & 26 & 44 \\ L5 & 32 & 54 \end{array}$

Página 60

40 a) Es un sistema compatible indeterminado, luego sí es posible hacerlo y hay infinitas formas de conseguirlo.

b) Si hacemos $y = \lambda$, obtenemos:

$x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = 3$, $t = 6 - 2\lambda$

Como las cantidades no pueden ser negativas, ha de ser $0 \le \lambda \le 3$.

41 a) $A^{-1} = -A + 2I$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

42 $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

43 $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB = BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

44 a) No. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Sí, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \;\; 2) \to B \cdot A = (5 \;\; 2 \;\; 0)$

45 No tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

46 Sí, por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

47 $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

48 Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, entonces:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$

49 Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ entonces:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \to$

$\to tr(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \to$

$\to tr(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$

50 a) Verdadero. No varía, puesto que la matriz que obtenemos tiene, como máximo, dos filas o dos columnas, luego su rango no puede ser mayor que dos. Por otra parte, como la nueva matriz contiene a A, el rango tiene que ser ≥ 2, es decir, el rango de la nueva matriz es 2.

b) Verdadero. $X - AX = B \to (I - A)X = B$. Multiplicando por $(I - A)^{-1}$ a la izquierda, tenemos la expresión final para calcular X.

c) Verdadero. $(A + I)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6I$

d) Verdadero. $AB = BA$. Como las dos matrices, AB y BA, son la misma, su traspuesta también será igual.

e) Falso. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3.

Si quitamos la última fila y la última columna, obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1.

f) Verdadero, porque $a_{ii} = -a_{ii} \to 2a_{ii} = 0 \to a_{ii} = 0$.

g) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2-1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 4 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -5 & -10 & k^2-21 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-6 \end{pmatrix}$$

La afirmación es falsa, pues para que $ran(M) = 3$, debe ser $k \neq \pm\sqrt{6}$.

h) Verdadero. Como A es regular, podemos multiplicar por A^{-1} a la derecha:

$(B - C)AA^{-1} = \mathbf{0}A^{-1} \to B - C = \mathbf{0} \to B = C$

51 a) Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C$, pero $B \neq C$.

b) Debe existir A^{-1}.

52 a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$AB + BA = \mathbf{0} \to A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \to B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \to BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Página 61

53 $X = A^{-1}(I - A^2)$ $\qquad X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

54 $XA^2 + BA = A^2 \to (X - I)A^2 = -BA$

$X - I = -BA^{-1} \to X = I - BA^{-1}$

55 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

56 $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

57 Si la matriz es *antisimétrica*, $k = 0$.

Las *matrices mágicas antisimétricas de orden 3* son de la forma:

$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}$, con $b \in \mathbb{R}$.

58 Una *matriz mágica simétrica de orden 3 con $k = 0$*, es de la forma:

$A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}$, con $f \in \mathbb{R}$.

59 $A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}$, con $f \in \mathbb{R}$.

60 a) $A^2 - 2A = 3I \to A(A - 2I) = 3I \to A \cdot \frac{1}{3}(A - 2I) = I$

Por tanto, A es invertible y su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)$$

b) $A^3 = 7A + 6I$

c) $A = \begin{pmatrix} 2-c & \sqrt{-(c+1)(c-3)} \\ \sqrt{-(c+1)(c-3)} & c \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2-c & -\sqrt{-(c+1)(c-3)} \\ -\sqrt{-(c+1)(c-3)} & c \end{pmatrix}$

61 Si $-A = A^{-1} \to A(-A) = I$

$\begin{pmatrix} 10-x^2 & 0 \\ 0 & 10-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 10 - x^2 = 1 \\ x = \pm 3 \end{matrix}$

Autoevaluación

1 Si $a = 3 \to ran(A) = 2$. Si $a \neq 3 \to ran(A) = 3$

2 B debe ser una matriz de dimensión 3×2.

3 $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$

$(A^2)^t = \begin{pmatrix} a^2+bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$

$(A^t)^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$

4 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5n & 1 \end{pmatrix}$

5 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

6 Las matrices buscadas son $X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

7 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $X = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

8 Si se añade una fila, puede tener, como máximo, rango 3, luego no es posible que la nueva matriz tenga rango 4.

9
$$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} T & O \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$$