DOSIER SEMANAL 07

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera los vectores del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas son:

$$\vec{u} = (1, \quad -1, \quad 3) \qquad \vec{v} = (k, \quad 0, \quad 2-k) \qquad \vec{w} = (m, \quad 2, \quad -6)$$

donde k y m son parámetros reales. Se pide determinar, razonadamente:

a) Los valores del parámetro real k para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean **ortogonales**.
b) Los valores del parámetro real m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean **paralelos**.
c) Las coordenadas de un vector **unitario** que tenga la misma dirección que $\vec{u}$.
d) Para $k = 3$, las coordenadas de un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
e) Para $m = 1$, las coordenadas de un vector **ortonormal*** a $\vec{u}$ y $\vec{w}$.
f) Para $k = 3$, el **ángulo** que forman en el espacio los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
g) Para $m = 1$, el área del **paralelogramo** formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$.
h) Para $k = m = 1$, el volumen del **tetraedro** formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) Para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales, su producto escalar ha de ser cero:
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, \quad -1, \quad 3) \cdot (k, \quad 0, \quad 2-k) = k + 6 - 3k = 6 - 2k \quad \rightarrow \quad 6 - 2k = 0 \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 3}$$

b) Para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean paralelos, sus coordenadas deben ser proporcionales:
$$\frac{1}{m} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{-6} \quad \rightarrow \quad -m = 2 \rightarrow \quad \boldsymbol{m = -2}$$

c) Calculemos primero el módulo del vector $\vec{u}$:
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$
Un vector unitario con la misma dirección puede obtenerse dividiendo el vector entre su módulo:

$$\vec{z} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{11}}, \quad \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$$

d) Para obtener un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, debemos calcular el producto vectorial de ambos:
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 10\vec{j} + 3\vec{k} = (1, \quad 10, \quad 3)$$

e) Primeramente construimos un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{w}$:
$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k} = (0, \quad 9, \quad 3)$$

Calcularemos ahora su módulo. Si su módulo es 1, este sería el vector que buscamos. En caso contrario, deberemos dividir cada coordenada por su módulo:

$$\|\vec{u} \times \vec{w}\| = \sqrt{0^2 + 9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

Así pues, un vector **ortonormal** a $\vec{u}$ y $\vec{w}$, sería:

$$\frac{\vec{u} \times \vec{w}}{\|\vec{u} \times \vec{w}\|} = \left(0, \quad \frac{9}{3\sqrt{10}}, \quad \frac{3}{3\sqrt{10}}\right) = \left(0, \quad \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

f) Sabemos por el apartado a) que para $k = 3$, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales. Por tanto, el ángulo que forma es de 90º.

g) El área del paralelogramo se corresponde con el módulo del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{w}$. Pero este valor ya lo hemos calculado en el apartado e). Así pues, el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ será:

$$A = \|\vec{u} \times \vec{w}\| = \sqrt{0^2 + 9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}\, u^2$$

h) El volumen del tetraedro se corresponde con una sexta parte del producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -3 \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\, u^3$$

PROBLEMA 2: **Discute y resuelve** el sistema de ecuaciones lineales en función de $m \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} mx + y = 0 \\ x + my = 0 \\ mx + my = 0 \end{aligned}\right\}$$

De antemano, sabemos que el sistema es homogéneo, por lo que siempre será compatible. Para explicitar en qué casos es determinado y cuales indeterminado, discutiremos el sistema **utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius**. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

$$\left.\begin{aligned} mx + y = 0 \\ x + my = 0 \\ mx + my = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ m & m & 0 \end{array}\right) = A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes, A. Para ello, calcularemos un menor principal de A en función del parámetro real m:

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 \quad \rightarrow \quad m^2 - 1 = 0 \rightarrow \quad m = \pm 1$$

Esto nos permite **distinguir tres casos posibles**:

CASO I: $m \neq -1 \ y \ m \neq 1$	
$\left(\begin{array}{cc\|c} m & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ m & m & 0 \end{array}\right)$	En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas: $R(A) = R(A) = n^{\underline{o}}\ incógnitas = 2$ motivo por el cual, el sistema es **<u>COMPATIBLE DETERMINADO</u>**. Al ser compatible determinado y homogéneo, sabemos que la única solución del sistema es la solución $(x, y) = (0, 0)$

CASO II: $m = 1$	
$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$	En este caso, se observa que el rango de la matriz A y la ampliada es 1 (pues todas sus filas son idénticas). Por tanto: $R(A) = R(A^*) = 1 \neq n^{\underline{o}} incógnitas = 2$ En consecuencia, el sistema es **<u>COMPATIBLE INDETERMINADO</u>** Para resolverlo emplearemos el método de Gauss: $\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=F3-F1]{F2'=F2-F1} \left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\rightarrow \quad x + y = 0 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x = -\lambda \\ y = \lambda \end{aligned}\right\} con \ \lambda \in \mathbb{R}$

CASO II: $m = -1$	
$\left(\begin{array}{cc\|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$	Si aplicamos el método de Gauss, observamos: $$\left(\begin{array}{cc\|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=F3-F1]{F2'=F2+F1} \left(\begin{array}{cc\|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$ En este caso, se observa que el rango de la matriz A y la ampliada es 2. Por tanto: $$R(A) = R(A^*) = nº incógnitas = 2$$ En consecuencia, el sistema es **<u>COMPATIBLE DETERMINADO</u>** Al ser compatible determinado y homogéneo, sabemos que la única solución del sistema es la solución $(x, y) = (0, 0)$

Como conclusión final, podemos observar que el sistema propuesto es compatible determinado siempre que $m \neq 1$ (con solución $(x, y) = (0, 0)$) mientras que es compatible indeterminado cuando $m = 1$ (con soluciones $(x, y) = (-\lambda, \lambda)\ con\ \lambda \in \mathbb{R}$)

PROBLEMA 3: Considera la matriz cuadrada de orden 3 dada por:

$$Z(x)=\begin{pmatrix}2 & x & 1\\ 1 & -4 & x+1\\ 0 & 4 & -x\end{pmatrix}$$

a) ¿Existe algún valor del parámetro real x para el cual la matriz propuesta es **singular**?
b) **Resuelve** la ecuación matricial dada por: $I+X\cdot Z(0)=3\cdot Z(1)$
c) Calcula el **determinante** de la matriz $2\cdot[(Z(0))^2]^{-1}$

a) Calculemos el determinante de la matriz $Z(x)$:

$$|Z(x)|=\begin{vmatrix}2 & x & 1\\ 1 & -4 & x+1\\ 0 & 4 & -x\end{vmatrix}=[F2'=F2+F3]=\begin{vmatrix}2 & x & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -x\end{vmatrix}=x^2-4$$

Igualamos el determinante a cero:

$$|Z(x)|=0\ \rightarrow\ x^2-4=0\ \ \rightarrow\ \ x=\sqrt{4}=\pm 2$$

Por tanto, la matriz propuesta **será singular cuando $x=\pm 2$**, ya que para estos valores su determinante es cero.

b) Primeramente, despejaremos la matriz X de forma algebraica:

$$I+X\cdot Z(0)=3\cdot Z(1)\ \ \rightarrow\ \ X\cdot Z(0)=3\cdot Z(1)-I\ \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ X\cdot Z(0)\cdot Z^{-1}(0)=(3\cdot Z(1)-I)\cdot Z^{-1}(0)\ \ \rightarrow\ \ X=(3\cdot Z(1)-I)\cdot Z^{-1}(0)$$

Calculemos primeramente la inversa de la matriz $B=Z(0)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -4 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$ de la cual sabemos que $|B|=|Z(0)|=0^2-4=-4$

Para ello, emplearemos el método de adjuntos:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot Adj^T(B)$$

A continuación obtendremos la matriz de adjuntos:

$$B_{11}=+\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-4 \qquad B_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0 \qquad B_{13}=+\begin{vmatrix}1 & -4\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4$$

$$B_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=4 \qquad B_{22}=+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0 \qquad B_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-8$$

$$B_{31}=+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix}=4 \qquad B_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad B_{33}=+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-8$$

Por tanto, **la inversa de la matriz B será**:

$$B^{-1} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -8 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & \frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así pues, dado que:

$$3\cdot Z(1) - I = 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & -13 & 6 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$X = (3\cdot Z(1) - I)\cdot Z^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & -13 & 6 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 9 & \frac{23}{4} \\ 4 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

c) Sabiendo que $|Z(0)| = -4$, basta aplicar las propiedades de los determinantes para calcular el determinante propuesto:

$$|2\cdot[(Z(0))^2]^{-1}| = 2^3\cdot\left|\left[(Z(0))^2\right]^{-1}\right| = \frac{8}{\left|(Z(0))^2\right|} = \frac{8}{|Z(0)|^2} = \frac{8}{(-4)^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$