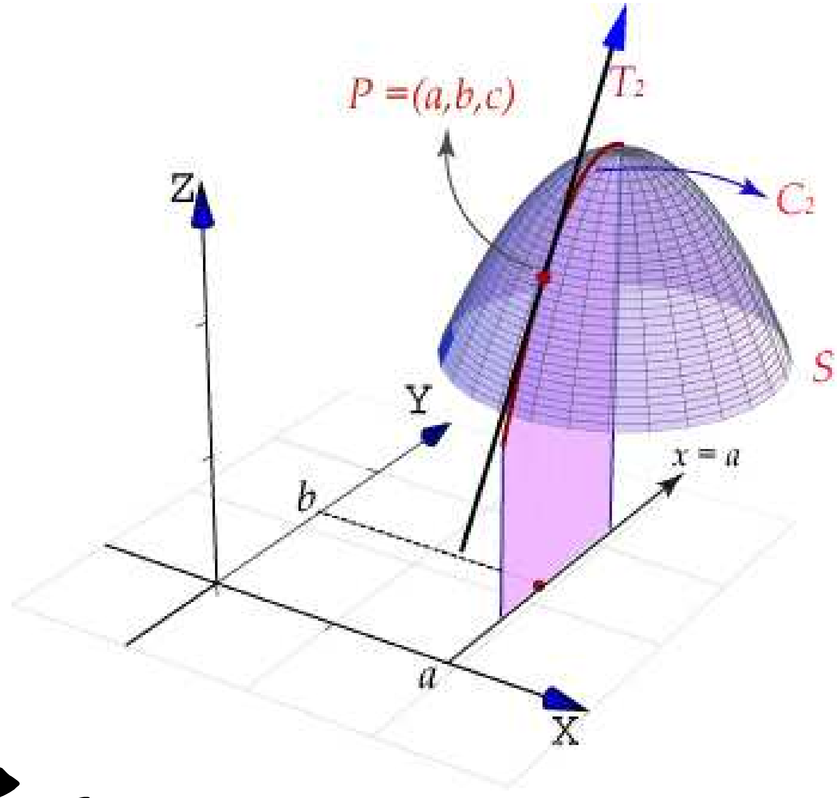
DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

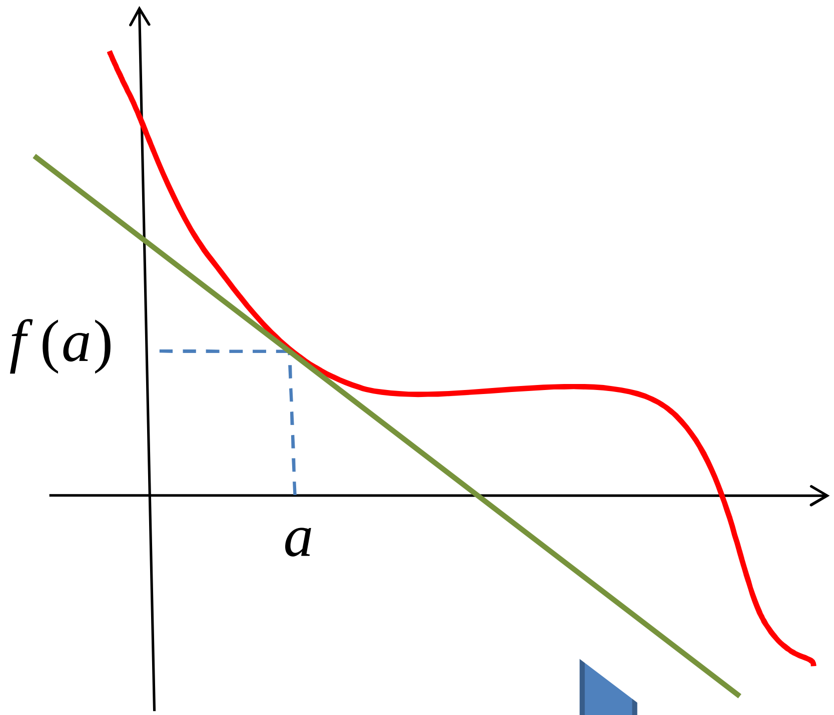


POR PEDRO A. MARTÍNEZ ORTIZ

DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Definición de derivada:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Interpretación

La **pendiente** de la tangente a la curva en un punto es igual a la **derivada** de la función en ese punto.

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

<u>Ejemplo</u>: Calcula la recta tangente a la curva *f(x)* en el punto de abcisa *x=2*

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

Sabemos que la ecuación de la recta tangente viene dada por la ecuación:

$$y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2)$$

Necesitamos calcular el valor de *f(2)* y *f'(2)*:

$$f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[(2+h)^2 + (2+h) + 1\right] - 7}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4 + h^2 + 4h + 2 + h + 1 - 7}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 5h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot(h+5)}{h} = \lim_{h\to 0} (h+5) = 5 \quad \Rightarrow \quad y - 7 = 5\cdot(x-2)$$

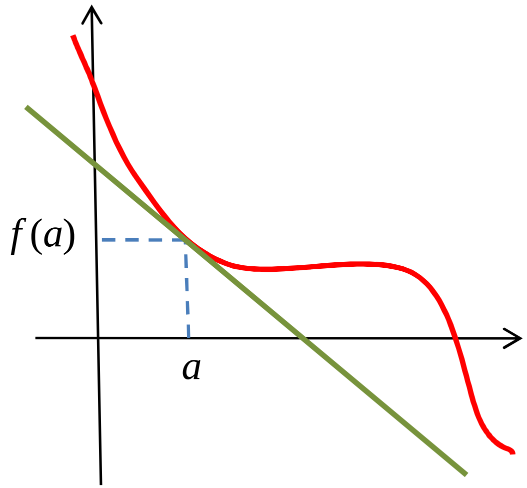
$$\Rightarrow \quad \boxed{y = 5x - 3}$$

DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

- *TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA*
- *PENDIENTE*
- *TANGENTE*

SINÓNIMOS DE

DERIVADA



DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

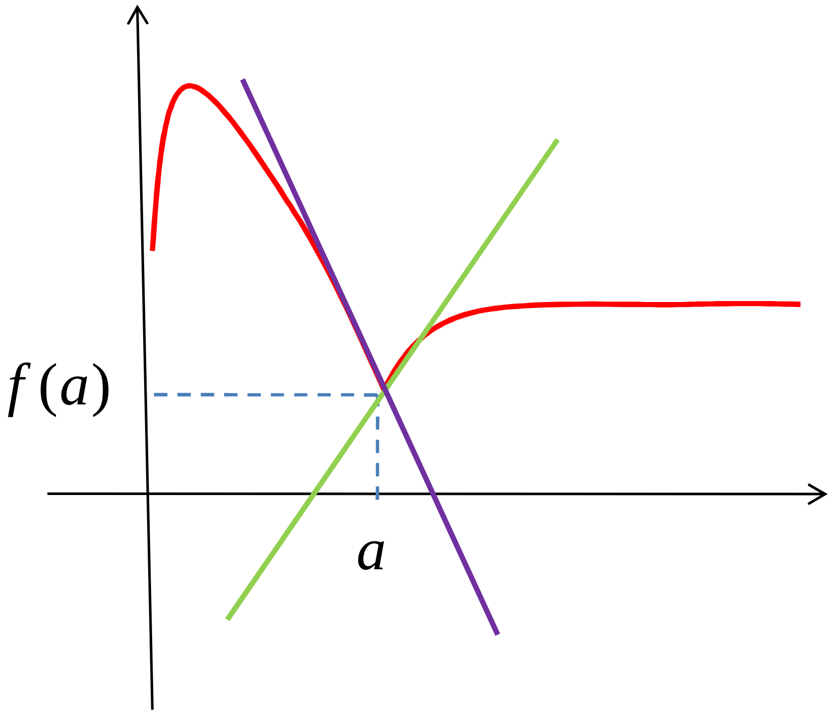
Derivadas laterales:

POR LA DERECHA

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

POR LA IZQUIERDA

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



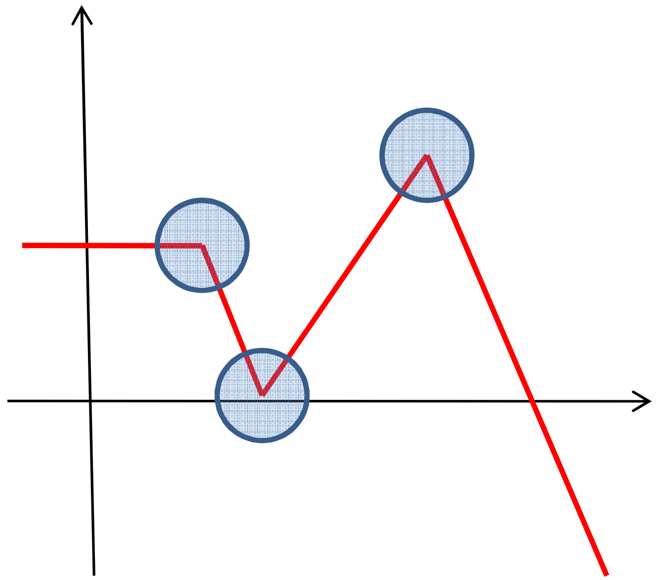
DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

*Se dice que una función es **DERIVABLE** en un punto si existen sus derivadas laterales y además son iguales:*

$$\boxed{f'(a^+) = f'(a^-)}$$

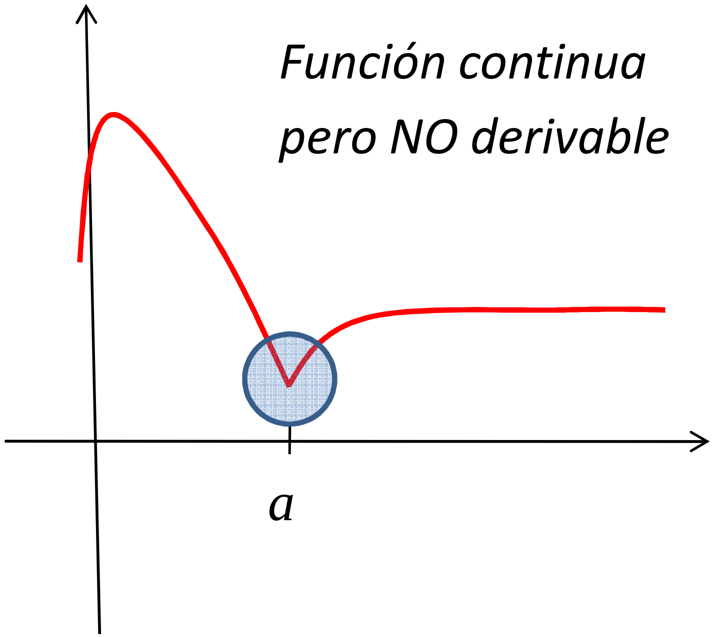
*Se dice que una función es **DERIVABLE** en un intervalo abierto si lo es en todos los puntos de dicho intervalo.*

*Aquellos puntos donde falla la derivabilidad se conocen en la literatura como **PUNTOS ANGULOSOS***



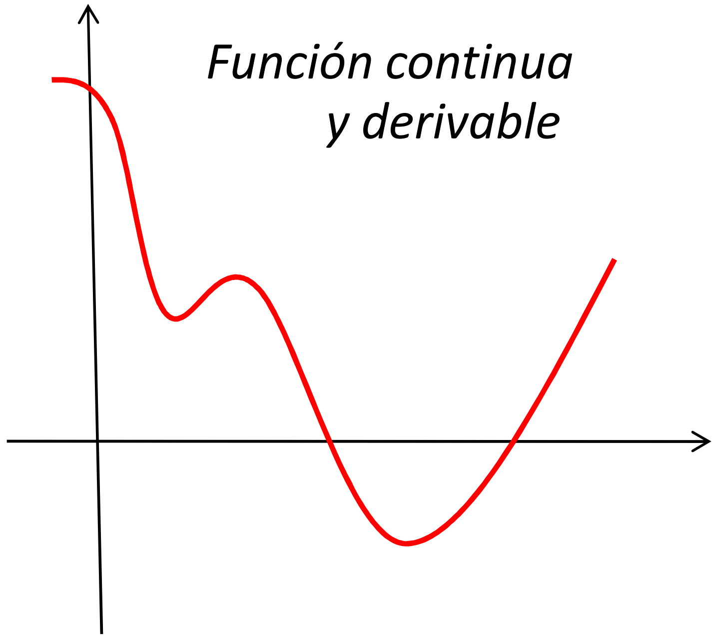
DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Función continua
pero NO derivable



¿Es continua?
¿Es derivable?

Función continua
y derivable



¿Es continua?
¿Es derivable?

<u>TODA FUNCIÓN DERIVABLE ES CONTINUA</u>

NO TODA FUNCIÓN CONTINUA ES DERIVABLE

DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

TABLA DE DERIVADAS

$y=k$	$y'=0$	$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
$y=x$	$y'=1$	$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$
$y=k\,x$	$y'=k$	$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\dfrac{1}{x}$	$y'=\dfrac{-1}{x^2}$	$y=\operatorname{sen} x$	$y'=\cos x$
$y=x^2$	$y'=2\,x$	$y=\cos x$	$y'=-\operatorname{sen} x$
$y=x^n$	$y'=n\,x^{n-1}$	$y=\tan x$	$\begin{cases} y'=1+\tan^2 x \\ \quad =\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x \end{cases}$
$y=e^x$	$y'=e^x$		
$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$		

DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

$y = \text{cotan}\, x$	$y' = \dfrac{-1}{\text{sen}^2 x} = -\text{cosec}^2 x$
$y = \text{arcsen}\, x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

¿Cómo derivar funciones de la forma $y = \sqrt[n]{x}$ *?*

Memorizar y aplicar esta expresión: $y = \sqrt[n]{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$

O bien: $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

*DERIVADA DE UNA **SUMA/RESTA***

$$\boxed{[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)}$$

$$y = sen(x) - \ln(x) \Rightarrow \quad \boxed{y' = \cos(x) - \frac{1}{x}}$$

*DERIVADA DE UN **PRODUCTO***

$$\boxed{[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

$$y = e^x \cdot (x^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad y' = e^x \cdot (x^2 + 1) + e^x \cdot 2x = e^x \cdot [(x^2 + 1) + 2x]$$

$$= e^x \cdot (x^2 + 2x + 1) = \boxed{e^x \cdot (x+1)^2}$$

DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

DERIVADA DE UN COCIENTE $\boxed{\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$

$$y = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \quad y' = \frac{e^x \cdot \sqrt{x} - e^x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{e^x \cdot \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} =$$

$$= \frac{e^x \cdot \left(\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = \frac{e^x \cdot (2x-1)}{2x\sqrt{x}} = \boxed{\frac{e^x \cdot (2x-1)}{2\sqrt{x^3}}}$$

DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

CONSEJO: Reserva la *fórmula del cociente* para cocientes entre dos funciones que dependen ambas de *x*

$y = \dfrac{x}{2}$	$y = \dfrac{2}{x}$	$y = \dfrac{2x+1}{x-1}$
⇓	⇓	⇓
$y = \dfrac{1}{2}x$	$y = 2 \cdot x^{-1}$	$y' = \dfrac{2 \cdot (x-1) - (2x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}$
⇓	⇓	⇓
$\boxed{y' = \dfrac{1}{2}}$	$y' = -2 \cdot x^{-2} = \boxed{\dfrac{-2}{x^2}}$	$\boxed{y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2}}$

DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

REGLA DE LA CADENA: $\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)}$

$$y = \ln\left(\cos\left(x^2 + x\right)\right)$$

$$y' = \frac{1}{\cos\left(x^2 + x\right)}\cdot\left(-sen\left(x^2 + x\right)\right)\cdot(2x+1) =$$

$$= -\frac{sen\left(x^2 + x\right)}{\cos\left(x^2 + x\right)}\cdot(2x+1) = \boxed{-(2x+1)\cdot\tan\left(x^2 + x\right)}$$

DERIVABILIDAD Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA:

¿Qué ocurre con aquellas funciones que son de la forma $f(x)^{g(x)}$ *?*

$$\boxed{y = x^x}$$

***<u>Paso 1</u>**: Aplicamos **logaritmos** neperianos a ambos lados de la igualdad*

$$\ln y = \ln x^x$$

***<u>Paso 2</u>**: Aplicamos las **propiedades** de los logaritmos*

$$\ln y = x \ln x$$

***<u>Paso 3</u>**: **Derivamos** ambos términos de la igualdad*

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

***<u>Paso 4</u>**: **Despejamos** la derivada de la función original*

$$y' = y \cdot (\ln x + 1) \Rightarrow \boxed{y' = x^x \cdot (\ln x + 1)}$$