DOSSIER SEMANAL 03

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Dada la siguiente matriz cuadrada de orden 3:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calcula su determinante.

b. Calcula los siguientes determinantes: $\left|E^T\right|$, $\left|-\frac{1}{2}E\right|$, $\left|E^2\right|$ y $\left|\sqrt[3]{20}\cdot E^{-1}\right|$.

a) Calcularemos su determinante utilizando la regla de Sarrus:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |E| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-3+0)-(2+0+1) = -4$$

b) Para calcular los determinantes planteados, recurriremos a las propiedades de los determinantes siempre que sea posible:

- Dado que una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante:

$$\left|E^T\right| = |E| = -4$$

- Utilizaremos aquí la propiedad $|k\cdot A| = k^n|A|$ siendo n el orden de la matriz A, que en este caso que nos ocupa es 3:

$$\left|-\frac{1}{2}E\right| = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 |E| = -\frac{1}{8}\cdot(-4) = \frac{1}{2}$$

- Sabemos que $\left|A^n\right| = |A|^n$, por tanto:

$$\left|E^2\right| = |E|^2 = (-4)^2 = 16$$

- Utilizando propiedades descritas con anterioridad:

$$\left|\sqrt[3]{20}\cdot E^{-1}\right| = \left(\sqrt[3]{20}\right)^3\left|E^{-1}\right| = 20\cdot\left|E^{-1}\right| = 20\cdot|E|^{-1} = \frac{20}{|E|} = \frac{20}{-4} = -5$$

PROBLEMA 2: Calcula el valor del siguiente determinante en función del parámetro x:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

Antes de realizar el desarrollo del determinante por adjuntos, nos centraremos en conseguir algunos ceros en la matriz utilizando las propiedades de los determinantes que mantienen inalterable el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F2' = F2 - F1 \\ F3' = F3 - F1 \\ F4' = F4 - F1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x-3 & 3-x & 0 & 0 \\ x-3 & 0 & 3-x & 0 \\ x-3 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x-3 & -(x-3) & 0 & 0 \\ x-3 & 0 & -(x-3) & 0 \\ x-3 & 0 & 0 & -(x-3) \end{vmatrix}$$ = [Sacando factor común de las filas 1, 2 y 3]=

$$= (x-3)^3 \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Así pues, si calculamos ahora el determinante que queda mediante su desarrollo por adjuntos a partir de la última columna (por ejemplo), obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x \cdot A_{14} - 1 \cdot A_{44} = -x \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -x - (3+2x) = -3 - 3x = -3 \cdot (x+1)$$

Así pues, el determinante que nos piden será:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = (x-3)^3 \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (x-3)^3 (x+1)$$

PROBLEMA 3: Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera proporciona una demostración de la misma y en caso de ser falsa propón un ejemplo donde se aprecie la falsedad de la proposición.

a) Dadas dos matrices cuadradas A y B se cumple que $|A+B|=|A|+|B|$

b) Toda matriz cuadrada A de orden n que verifica la ecuación $A^2-A-2I=0$ tiene inversa.

c) Una matriz cuadrada A de orden n y A^2 siempre poseen el mismo rango.

d) Dadas dos matrices A y B se cumple que si $A\cdot B=0$ entonces $A=0$ o $B=0$

a) **FALSO**. Para demostrar que una afirmación es falsa basta con encontrar un ejemplo donde se vea que la propiedad no se cumple. Así pues, imaginemos las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$$

Vemos que el determinante de la suma de ambas no coincide con la suma de los determinantes de cada una de ellas por separado:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{vmatrix}=4-6=-2$$

$$|A+B|=\left|\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0 \quad \text{pero} \quad |A|+|B|=-2+(-2)=-4$$

b) **VERDADERO**. Vamos a demostrarlo formalmente. Sabemos que:

$$A^2-A-2I=0 \quad \Rightarrow \quad A^2-A=2I \quad \Rightarrow \quad (A-I)\cdot A=2I$$

Si dividimos ahora entre dos la igualdad, obtenemos que:

$$(A-I)\cdot A=2I \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(A-I)\cdot A=I$$

Utilizando la definición de matriz inversa, observamos que la matriz $\frac{1}{2}(A-I)$ al multiplicarla por la matriz A se obtiene la matriz identidad. Por tanto, la matriz $\frac{1}{2}(A-I)$ es la inversa de A. Resumiendo: $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I)$

Esto quiere decir que la matriz A tiene inversa, o lo que es lo mismo es regular.

c) **FALSO**. Basta con considerar la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Si observamos, el rango de la matriz A es dos ya que tiene dos filas linealmente independientes (de hecho, está triangulada y sólo hay dos filas que no son completamente nulas). Sin embargo, si calculamos su cuadrado obtenemos:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Y como vemos su rango en este caso es 1 ya que está triangulada y sólo hay una fila que no es completamente nula.

Como conclusión, podemos decir que una matriz y su cuadrado no tienen por qué tener el mismo rango.

d) **FALSO**. Basta con considerar las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

Si realizamos su multiplicación vemos que:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Es decir, al multiplicarlas hemos obtenido la matriz nula, pero ninguna de las matrices multiplicadas es la matriz nula.