SOLUCIÓN

DOSSIER SEMANAL 4

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Halla el punto de la curva $y = Ln\left(1+x^2\right)$ en que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa $x=1$.

Aunque no es estrictamente necesario para resolver el problema, **calcularemos primeramente la recta tangente** a la curva en el punto de abcisa $x=1$.

Sabemos que la ecuación de la recta tangente vendrá dada por la expresión:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Así pues:

$$f(x) = y = Ln\left(1+x^2\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = Ln\left(1+1^2\right) = Ln\,2 \\ f'(x) = \dfrac{2\cdot 1}{1+1^2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y - Ln\,2 = 1\cdot(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = x - 1 + Ln\,2$$

Como vemos, su pendiente es $m = f'(1) = 1$. Así pues, l**a pendiente de la recta perpendicular será**:

$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{1} = -1$$

Finalmente, lo que queremos averiguar es en qué punto de la curva, la tangente tiene la pendiente de la recta perpendicular, es decir, en qué punto la derivada vale $m' = -1$.

$$f'(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{1+x^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad 2x = -1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Por tanto, **las coordenadas del punto de la curva que buscamos serán**:

$$P\left(-1,\, f(-1)\right) = P\left(-1,\, Ln\left(1+(-1)^2\right)\right) = P\left(-1,\, Ln\,2\right)$$

SOLUCIÓN

DOSSIER SEMANAL 4

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 2: Calcula los valores de los parámetros reales a y b en la función $f(x)$ para que pueda aplicarse el Teorema de Bolzano en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Tras ello, calcula el punto o puntos que predice el teorema.

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & si \ -\pi \le x \le 0 \\ a+x^2 & si \ \ 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x} & si \ \ 1 \le x \le \pi \end{cases}$$

Recordemos que **el Teorema de Bolzano** dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y verifica además que $f(a)\cdot f(b) < 0$ (es decir, la función toma valores de signo opuesto en los extremos) entonces existe al menos un punto que llamaremos c del intervalo abierto (a, b)donde la función $f(x)$ se anula. Expresando la tesis matemáticamente:

$$\exists c \in (a, b) \mid f(c) = 0$$

Así pues, primero deberemos calcular los valores de a y b para forzar que la función sea continua. Observamos primeramente que la función no presenta ningún problema de definición. Así mismo, la función está formada por funciones continuas en cada uno de los tramos indicados por lo que los únicos puntos que requieren ser estudiados en profundidad son los puntos de cambio.

- Para $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \cos 0 = 1 \\ \underset{x\to 0+}{Lim}\ f(x) = \underset{x\to 0+}{Lim}\ a + x^2 = a \\ \underset{x\to 0-}{Lim}\ f(x) = \underset{x\to 0-}{Lim}\ \cos x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = 1$$

- Para $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{b}{x}=b \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{b}{x}=b \\ \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} a+x^2=a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b=a+1 \quad \Rightarrow \quad b=1+1 \quad \Rightarrow \quad b=2$$

Así pues, para que la función sea continua **los parámetros deben valer** $a=1$ **y** $b=2$.

Debemos comprobar que para estos valores la función toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo $[-\pi,\pi]$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-\pi)=\cos(-\pi)=-1 \\ f(\pi)=\dfrac{2}{\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-\pi)\cdot f(\pi)<0$$

Dado que se cumplen las condiciones del Teorema de Bolzano, concluimos que:

$$\exists c\in(a,b) \mid f(c)=0$$

Vamos a calcular ahora el punto o puntos que predice el Teorema de Bolzano en este caso. Dado que la función tiene tres tramos vamos a comprobar si la función se anula en alguno de ellos:

- Para $-\pi<x\leq 0$: $\cos x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in Z$

  Pero en el tramo $-\pi<x\leq 0$ sólo hay una raíz de esta ecuación que es $x=-\dfrac{\pi}{2}$

- Para $0<x<1$: $1+x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=-1$

  Y esta ecuación no tiene solución real.

- Para $1\leq x<\pi$: $\dfrac{2}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad 2=0$

  Que es un absurdo que nos lleva a concluir que no hay solución en este tramo.

Así pues **el punto que predice el Teorema de Bolzano en este caso es** $x=-\dfrac{\pi}{2}$**.**

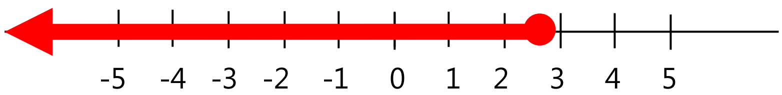
PROBLEMA 3: La parte entera de un número se define matemáticamente como:

$$E(x) = \max\left\{ n \in Z \,\middle|\, n \leq x \right\}$$

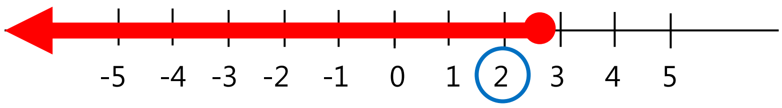
es decir, la parte entera de x es el mayor de los enteros que es menor o igual x. Realiza una representación gráfica de la función $f(x) = E(x)$ y a partir de dicha gráfica, estudia su continuidad y derivabilidad.

Para representar esta función, basta con recurrir a una tabla de valores y analizar un poco cuál es su comportamiento. Primeramente hemos de entender qué significa la expresión que define a la función.

Imaginemos que queremos calcular la parte entera de $x = 2.8$. La parte entera de $x = 2.8$ será un número entero pero, ¿cuál? Primero hemos de determinar el conjunto de números que son menores o iguales que $x = 2.8$ (ver representación).

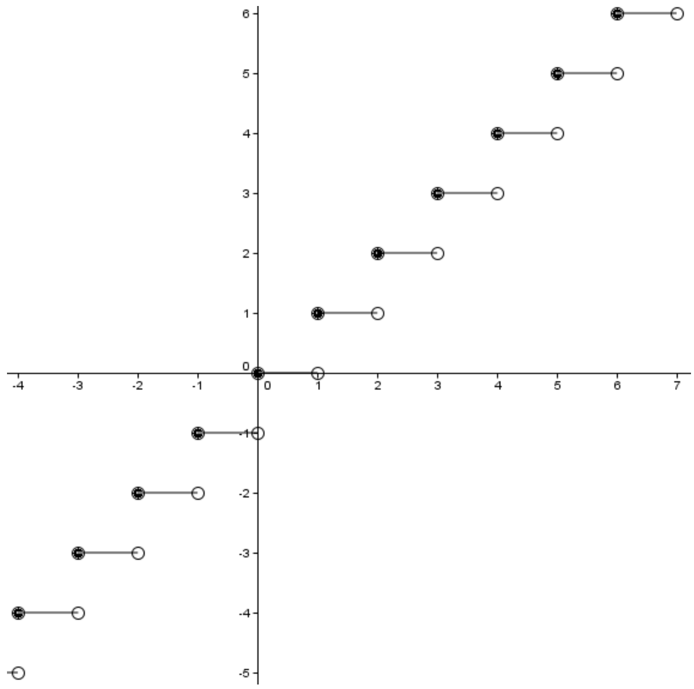


Una vez tenemos claro qué números son menores o iguales que $x = 2.8$ simplemente hemos de cuál es el entero más grande que hay en este conjunto.



En este caso será 2, por lo que $E(2.8) = 2$. Siguiendo este razonamiento, **podemos construir una rudimentaria tabla de valores** que nos permitirá trazar la gráfica de la función $f(x) = E(x)$.

x	$f(x)$
2.3	2
2.1	2
2	2
1.9	1
1.5	1
0.5	0
-0.5	-1
-0.9	-1
-1	-1
-1.2	-2
-1.9	-2
-2	-2
-2.7	-3
-2.8	-3



A la vista de la gráfica es fácil estudiar la continuidad y derivabilidad de esta función. Como podemos apreciar, la función no es continua para valores enteros (donde presenta discontinuidades de salto finito). En consecuencia, al no ser continua para valores enteros, tampoco será derivable. Como conclusión, y utilizando lenguaje matemático, **la función $f(x) = E(x)$ es continua y derivable en $R - Z$.**