

2

BLOQUE DE ÁLGEBRA **DETERMINANTES**

Pedro A. Martínez Ortiz
IES María Blasco





Determinantes de orden 2

El determinante es un **valor numérico** que tiene asociado cualquier **matriz cuadrada** y que nos ayudará a determinar características importantes de la misma. Dada la matriz cuadrada A , podemos referirnos a su determinante como $|A|$ o como **det(A)**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 5$$



WARNING

Presta detalle a la notación

Determinantes de orden 3

La **regla de Sarrus** para determinantes de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$



EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (4 + 6 + 0) - (0 + 6 + (-8)) = 12$$

Propiedades de los determinantes

Calculemos el determinante:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 6 + 0) - (0 - 4 + 3) = 7$$

¿Qué ocurrirá si en el determinante anterior intercambiamos un par de filas (o columnas)?

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 + 0 - 4) - (6 + 0 + 0) = -7$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (0 + 3 - 4) - (0 + 0 + 6) = -7$$

PROPIEDAD 1

Por cada intercambio de filas en un determinante, su signo cambiará.

Lo mismo ocurrirá con las columnas.

Propiedades de los determinantes

Calculemos el determinante:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 6 + 0) - (0 - 4 + 3) = 7$$

¿Qué ocurrirá si a una fila le sumamos un múltiplo de otra? $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4 + 12 + 0) - (0 - 8 + 9) = 7$$

PROPIEDAD 2

Si a una fila se le añade una combinación lineal de otras filas, entonces el determinante de la matriz no cambia.

Lo mismo ocurrirá con las columnas.

Propiedades de los determinantes

Calculemos el determinante:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 6 + 0) - (0 - 4 + 3) = 7$$

¿Qué relación guarda este determinante con el inicial?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (3 + 18 + 0) - (0 - 12 + 9) = 21 = 3 \cdot 7$$

PROPIEDAD 3

Si multiplicamos una fila por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

(Lo mismo ocurre para las columnas)



ATENCIÓN

Esta propiedad es más útil vista al revés (sacar factor común de filas/columnas)

$$\begin{vmatrix} k \cdot a & k \cdot b & k \cdot c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k \cdot a & b & c \\ k \cdot d & e & f \\ k \cdot g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$



Propiedades de los determinantes

Calculemos el determinante:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 6 + 0) - (0 - 4 + 3) = 7$$

¿Qué ocurrirá entonces con este determinante?

$$\begin{vmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = (-48) - (32 - 24) = -56 = (-2)^3 \cdot 7$$

PROPIEDAD 4

Si multiplicamos una matriz por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número elevado al orden de la matriz.



ATENCIÓN

Recuerda que es más útil vista al revés:

$$|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$$

siendo $k \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$

Prestar atención al orden de la matriz, **¡no siempre será 3!**



Propiedades de los determinantes

¿Qué ocurrirá si tenemos una fila o columna llena de ceros?

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

PROPIEDAD 5

Si una fila o columna es nula, entonces el determinante será cero.

¿Qué ocurrirá si una fila depende linealmente de otras?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Observamos que} \\ F_3 = 2F_1 + F_2 \end{array} \right] =$$

$$= (-4 + 0 - 4) - (-6 + 0 - 2) = -8 + 8 = 0$$

PROPIEDAD 6

Si una fila es combinación lineal de otras filas, entonces el determinante será cero.

(Lo mismo ocurre para las columnas)



Propiedades de los determinantes

¿Qué ocurrirá si tenemos una matriz triangular?

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \\ 96 & 27 & 3 \end{vmatrix} = (5 \cdot 2 \cdot 3 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 30$$

¿Qué ocurrirá con el determinante de la matriz traspuesta?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 6) - (0 - 4 + 3) = 7$$

PROPIEDAD 7

El determinante de una matriz triangular coincide con el producto de los elementos de la diagonal principal.

PROPIEDAD 8

Una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante.

$$|A^T| = |A|$$

Propiedades de los determinantes

¿Qué ocurre con el determinante del producto de matrices?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |A \cdot B| = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 35 - 5 = 30$$

PROPIEDAD 9

Para cualquier par de matrices cuadradas:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$



ATENCIÓN

No se cumple si las matrices no son cuadradas. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

¿Qué ocurre con el determinante de la potencia de una matriz?

$$|A^n| = \underbrace{|A \cdot A \cdot A \cdots A|}_{n \text{ veces}} = \underbrace{|A| \cdot |A| \cdots |A|}_{n \text{ veces}} = |A|^n$$

↑
Prop 9

Veamos un ejemplo sencillo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -2 \quad |A^2| = 4 = |A|^2 \quad |A^3| = -8 = |A|^3$$

PROPIEDAD 10

Para cualquier matriz cuadrada:

$$|A^n| = |A|^n \text{ con } n \in \mathbb{N}$$



Propiedades de los determinantes

¿Qué ocurre con el determinante de la matriz inversa (**si existe**)?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 4 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{4}$$

Podemos demostrarlo:

$$A \cdot A^{-1} = I \rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

De esta propiedad se deduce una relación que nos será de mucha utilidad:

Una matriz es **invertible** si y solo si su determinante es **distinto de cero**.

PROPIEDAD 11

Para toda matriz invertible:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Propiedades de los determinantes



ATENCIÓN

¡No inventes propiedades!

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

$$\left. \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -8 + 15 = 7 \\ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = -8 + 15 = 7 \end{array} \right\} \rightarrow |A| + |B| = 14$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A + B| = 0$$

Una última propiedad que cumplen los determinantes:

PROPIEDAD 12

$$\begin{vmatrix} k+a & m+b & n+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & m & n \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Menor complementario y adjuntos

Cada elemento de una matriz cuadrada tiene asociado un MENOR COMPLEMENTARIO y un ADJUNTO.

El **menor complementario** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz que surge de eliminar la fila y columna de dicho elemento.

El **adjunto** A_{ij} del elemento a_{ij} es el su menor complementario multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Es decir:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -4$$



Cálculo de determinante por adjuntos

El determinante de una matriz también se puede calcular sumando los elementos de una fila (o columna) multiplicados cada uno de ellos por su adjunto.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} + 2 \cdot A_{34}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-9) = 9$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-9) + 2 \cdot 9 = -9$$



ATENCIÓN

Esta técnica permite calcular determinantes de orden superior a 3.



ATENCIÓN

Nos conviene siempre usar la fila o columna con más ceros (implica menos cálculo)



Cálculo de determinante por adjuntos



ATENCIÓN

Una técnica **muy útil** para calcular determinantes consiste en aplicar la **Prop 2** de los determinantes (para conseguir ceros) **y luego usar adjuntos**.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = [F_4 \rightarrow F_4 - F_3] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = [F_2 \rightarrow F_2 - 2 \cdot F_3] = \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{22} = \left[\begin{array}{l} \text{Calculamos el adjunto:} \\ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \end{array} \right] = 1 \cdot 8 = 8$$