DOSSIER SEMANAL 02

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: A continuación, determina (en cada caso, *siempre que sea posible*) la expresión analítica que permite calcular la matriz X que verifica la ecuación matricial indicada:

a) $AX - 2B = C^t$ b) $A = CX$ c) $XB + B = A - 2X$

d) $AX + XC = I$ e) $AX + C = BX$ f) $AXB - 2C^t = 4XB$

a) $AX - 2B = C^t \quad \Rightarrow \quad AX = C^t + 2B$

Si la matriz A es regular (es decir, si tiene inversa) podremos pre-multiplicar ambos términos de la ecuación por la inversa de la matriz A:

$$AX = C^t + 2B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}\cdot\left(C^t + 2B\right) \quad \Rightarrow \quad I\cdot X = A^{-1}\cdot\left(C^t + 2B\right)$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}\cdot\left(C^t + 2B\right)$$

b) Nuevamente, si la matriz C es regular:

$$A = CX \quad \Rightarrow \quad C^{-1}A = C^{-1}CX \quad \Rightarrow \quad C^{-1}A = I\cdot X \quad \Rightarrow \quad C^{-1}A = X$$

c) $XB + B = A - 2X \quad \Rightarrow \quad XB + 2X = A - B \quad \Rightarrow \quad X\cdot(B + 2I) = A - B$

Si la matriz $B + 2I$ es regular (es decir, si tiene inversa) podremos escribir:

$$X\cdot(B+2I) = A - B \quad \Rightarrow \quad X\cdot(B+2I)\cdot(B+2I)^{-1} = (A-B)\cdot(B+2I)^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X\cdot I = (A-B)\cdot(B+2I)^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = (A-B)\cdot(B+2I)^{-1}$$

d) De la ecuación propuesta no podemos obtener una expresión analítica de la matriz X ya que no podemos extraerla factor común al estar multiplicando a otras matrices por lados distintos.

e) $AX + C = BX \quad \Rightarrow \quad AX - BX = -C \quad \Rightarrow \quad (A-B)\cdot X = -C$

Si la matriz $A-B$ es regular (es decir, si tiene inversa) podremos escribir:

$$(A-B)\cdot X = -C \quad \Rightarrow \quad (A-B)^{-1}(A-B)\cdot X = (A-B)^{-1}(-C) \quad \Rightarrow \quad I\cdot X = -(A-B)^{-1}C$$

$$\Rightarrow \quad X = -(A-B)^{-1}C$$

f) $AXB - 2C^t = 4XB \quad \Rightarrow \quad AXB - 4XB = 2C^t \quad \Rightarrow \quad (A-4I)\cdot XB = 2C^t$

Si la matriz $A-4I$ es regular (es decir, si tiene inversa) podremos escribir:

$$(A-4I)\cdot XB = 2C^t \quad \Rightarrow \quad (A-4I)^{-1}(A-4I)\cdot XB = (A-4I)^{-1}2C^t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I\cdot XB = (A-4I)^{-1}2C^t \quad \Rightarrow \quad XB = (A-4I)^{-1}2C^t$$

Si la matriz B es regular (es decir, si tiene inversa) podremos escribir:

$$XB = (A-4I)^{-1}2C^t \quad \Rightarrow \quad XBB^{-1} = (A-4I)^{-1}2C^tB^{-1} \quad \Rightarrow \quad X\cdot I = (A-4I)^{-1}2C^tB^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X = (A-4I)^{-1}2C^tB^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = 2(A-4I)^{-1}C^tB^{-1}$$

PROBLEMA 2: ¿Qué significa que dos matrices sean inversas una de la otra? Demuestra que cualquier matriz M (cuadrada de orden n) que verifica la relación $M^2 - 3M - I = 0$ tiene inversa (donde I denota la matriz identidad de orden n)

Se dice que dos matrices A y B son inversas entre sí si se verifica que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Basándonos en esta definición de matriz inversa vamos a probar que toda matriz M (cuadrada de orden n) que verifica la relación $M^2 - 3M - I = 0$ tiene inversa. Para ello, simplemente basta con manipular adecuadamente la relación proporcionada:

$$M^2 - 3M - I = 0 \quad \Rightarrow \quad M^2 - 3M = I \quad \Rightarrow \quad M \cdot (M - 3I) = I$$

Así pues hemos encontrado una matriz (que es M-3I) que al multiplicarla por M me ha dado la identidad. Ello quiere decir que

$$M^{-1} = M - 3I$$

Y por tanto la matriz M tiene inversa.

PROBLEMA 3: Considera las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-3&1\\2&1&m\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcula A^n siendo n un número natural cualquiera.

b) Determina el rango de la matriz B en función del parámetro real m.

c) Para m=5 determina, si es posible la inversa de la matriz B

d) Para m=5, determina la matriz X que verifica

$$XB+C^t=A^3$$

donde I es la matriz identidad de orden 3.

a) Calcularemos las primeras potencias para ver si existe alguna pauta clara que podamos sintetizar de forma matemática:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&8&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&8&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&16&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&16&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&32&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Así pues, observamos que la potencia de la matriz propuesta modifica su estructura básica en función de si el exponente de la potencia es par o impar. No obstante, el término que ocupa la fila 2 y columna 2 siempre resulta ser la potencia en base 2 con el mismo exponente al que está elevada la matriz. Por tanto, podemos decir que:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si\ n\ es\ impar \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & si\ n\ es\ par \end{cases}$$

Demostremos por inducción sobre n que ciertamente es así.

PASO I: Vemos que se cumple para *n=1*: $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

PASO II: Consideramos que la hipótesis es cierta para un valor genérico $k \in N$ que supondremos (sin pérdida de generalidad) que es impar

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PASO III: Ahora debemos demostrar que se cumple la fórmula para $k+1$. Dado que si k es impar, k+1 será par, deberemos obtener que:

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobémoslo:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k \cdot 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues, con ello, queda demostrado que la potencia n-ésima de la matriz propuesta es:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si\ n\ es\ impar \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & si\ n\ es\ par \end{cases}$$

b) Dado que de momento sólo disponemos del método de Gauss para determinar el rango de una matriz, será este método el que empleemos.

$$Rg(B) = Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & m-6 \end{pmatrix} =$$

$$= [F'_3 = 5F_3 - 3F_2] = Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5m-24 \end{pmatrix}$$

Así pues, el rango de la matriz propuesta dependerá de:

$$5m - 24 = 0 \ \rightarrow \ m = \frac{24}{5}$$

Distinguimos por tanto dos posibles casos:

CASO I: Si $m \neq \frac{24}{5}$.

En este caso el rango de la matriz propuesta será 3 ya que ninguna fila de la matriz se anularía completamente.

CASO II: Si $m = \frac{24}{5}$.

En este caso el rango de la matriz B será 2 ya que sólo una fila sería completamente nula tras la triangulación por el método de Gauss.

c) Calculemos la inversa de B mediante el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{bmatrix} F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to [F'_3 = 5F_3 - 3F_2] \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \end{array}\right) \to \begin{bmatrix} F'_2 = F_2 + 2F_3 \\ F'_1 = F_1 - 3F_3 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 22 & 9 & -15 \\ 0 & -5 & 0 & -15 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \end{array}\right) \to [F'_1 = 5F_1 + 2F_2] \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 80 & 35 & -55 \\ 0 & -5 & 0 & -15 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \end{array}\right) \to \begin{bmatrix} F'_1 = \frac{1}{5}F_1 \\ F'_2 = -\frac{1}{5}F_2 \end{bmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 16 & 7 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Así pues, la inversa de la matriz propuesta es:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 7 & -11 \\ 3 & 1 & -2 \\ -7 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Resolvamos ahora la ecuación propuesta:

$$XB + C^t = A^3 \;\to\; XB = A^3 - C^t \;\to\; XB \cdot B^{-1} = (A^3 - C^t) \cdot B^{-1} \;\to$$

$$\to\; X = (A^3 - C^t) \cdot B^{-1}$$

Así pues:

$$X = (A^3 - C^t) \cdot B^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 16 & 7 & -11 \\ 3 & 1 & -2 \\ -7 & -3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & -4 & 7 \\ 15 & 4 & -10 \\ 13 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$