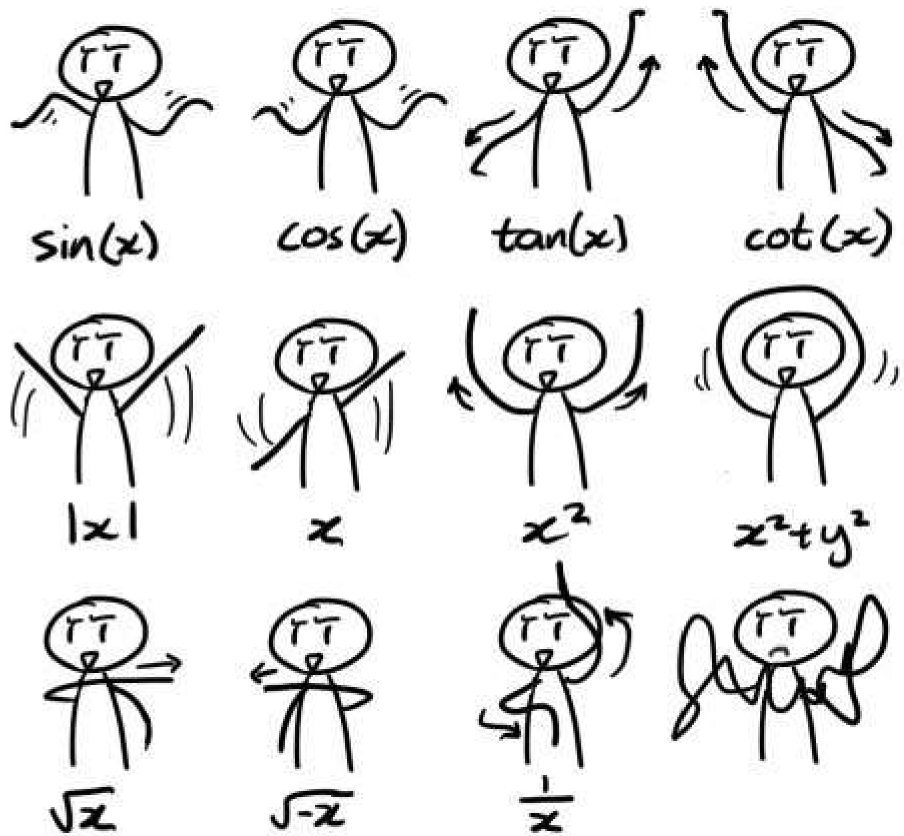
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

POR
PEDRO A.
MARTÍNEZ ORTIZ

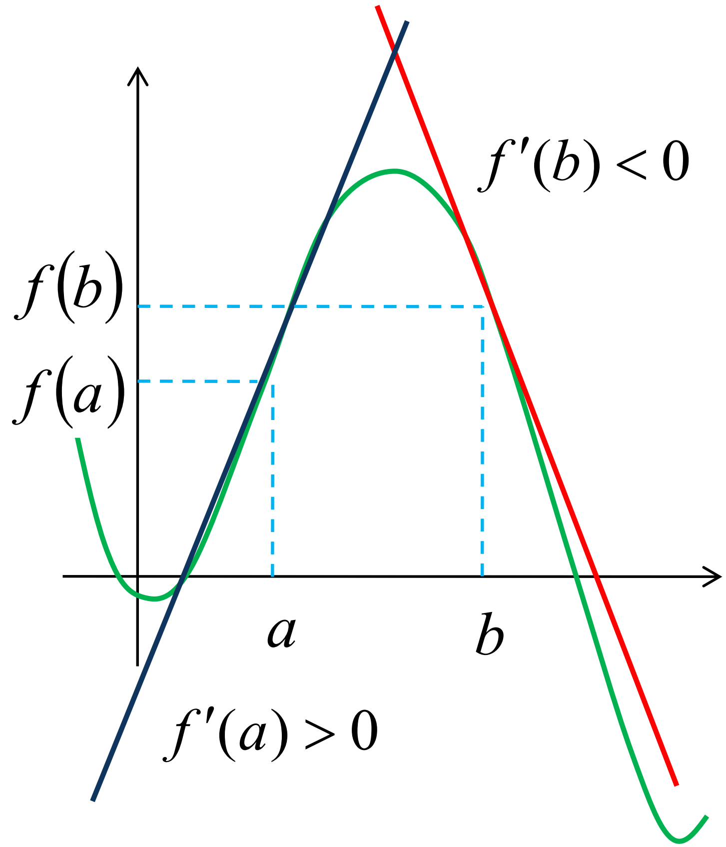


MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

La derivada de una función nos ayuda a determinar su **monotonía**, es decir aquellos tramos donde es **creciente** o **decreciente**.

Si la derivada en un punto es **positiva** entonces es creciente en dicho punto.

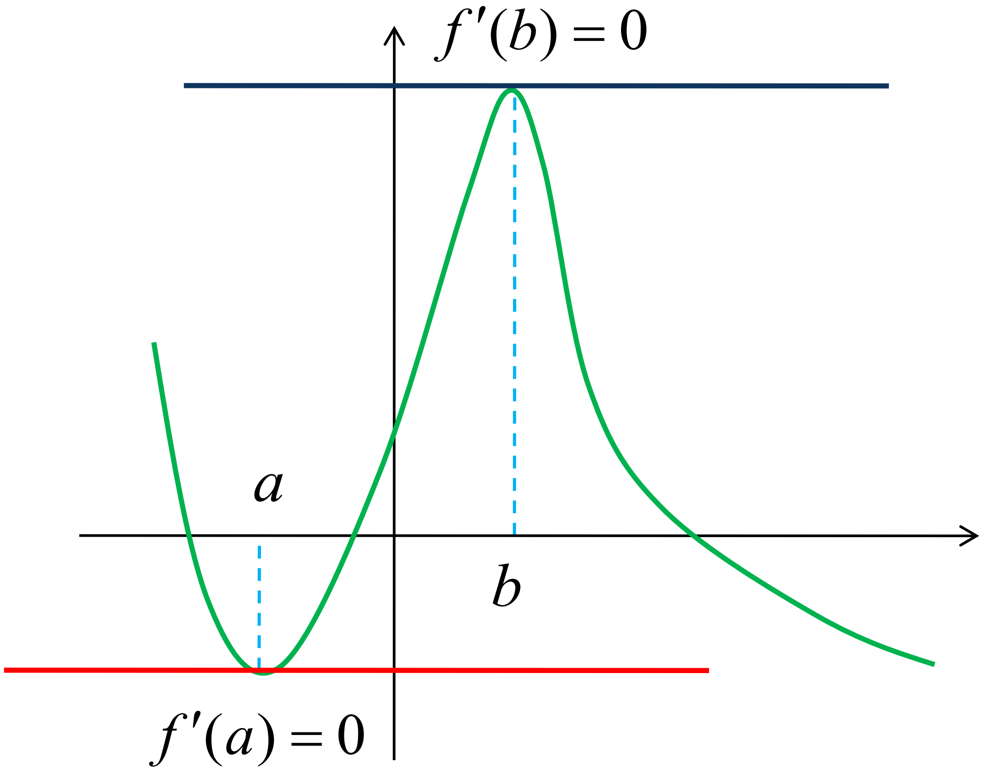
Si la derivada en un punto es **negativa** entonces es decreciente en dicho punto.



MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

Así pues, los **MÁXIMOS** y **MÍNIMOS** de una función verificarán la ecuación:

$$\boxed{f'(x) = 0}$$



TEOREMA DE FERMAT: Si en x=a la función f(x) presenta un máximo o mínimo entonces $f'(a) = 0$

IMPORTANTE: Si en x=a se cumple $f'(a) = 0$, no quiere decir que en x=a haya un máximo o mínimo (puede que sí o puede que no)

MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

¿Cómo saber si un punto $x = a$ que cumple $f'(x) = 0$ es un ***máximo*** o ***mínimo o ninguna de las dos cosas***?

Estudiando la segunda derivada:

- Si $f''(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ alcanza un mínimo relativo en $x = a$
- Si $f''(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ alcanza un máximo relativo en $x = a$

¿Y si resulta que $f''(a) = 0$?

Entonces deberemos estudiar el signo de la siguiente derivada de orden par.

MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

¿Cómo saber si un punto $x = a$ que cumple $f'(x) = 0$ es un ***máximo*** o ***mínimo o ninguna de las dos cosas***?

<u>Otra manera</u> de contestar a esta pregunta es **<u>estudiar el signo de la primera derivada</u>** a la izquierda y derecha del punto crítico:

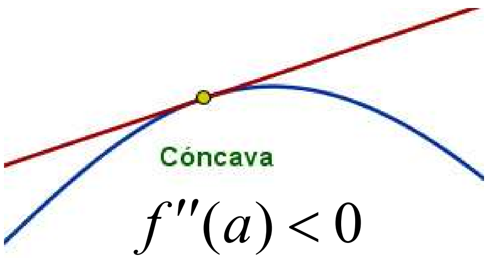
$$f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$-\infty$ a 0	0 a $+\infty$
SIGNO DE LA DERIVADA	$-$	$+$
MONOTONÍA DE LA FUNCIÓN	↘	↗

MÍNIMO RELATIVO

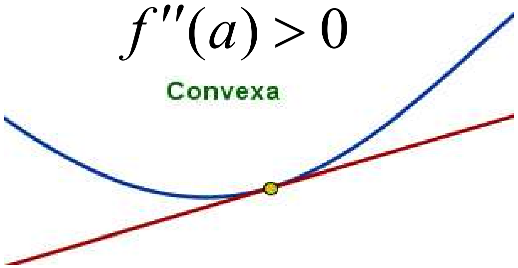
CURVATURA DE UNA FUNCIÓN

La **segunda derivada** nos proporciona información sobre la **curvatura** de una función en un punto.



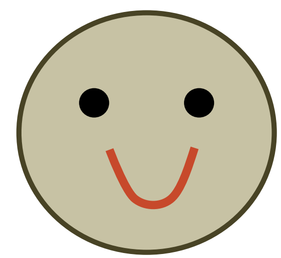
$$f''(a) < 0$$

$$f''(a) > 0$$



Hay autores que asignan los nombres de forma contraria. En cualquier caso, lo que debéis recordar es la forma de la curvatura:

Si se es negativo… $f''(a) < 0$



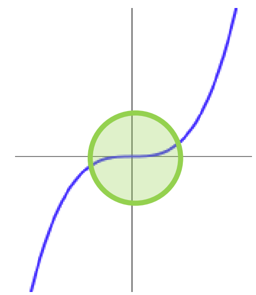
Si se es positivo… $f''(a) > 0$

CURVATURA DE UNA FUNCIÓN

Los puntos donde la función pasa de cóncava a convexa (o viceversa) se denominan **PUNTOS DE INFLEXIÓN**.

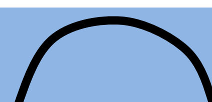
Teorema: Si en x=a la función f(x) presenta un punto de inflexión, entonces se cumple que $f''(a)=0$. Todos los puntos de inflexión verificarán la ecuación:

$$\boxed{f''(a)=0}$$



$$f(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x \Rightarrow \boxed{f''(x)=6x+6}=0 \Rightarrow x=-1$$

$-\infty \qquad -1 \qquad +\infty$

SIGNO DE LA **SEGUNDA** DERIVADA	$-$	$+$
CURVATURA DE LA FUNCIÓN		

PUNTO DE INFLEXIÓN

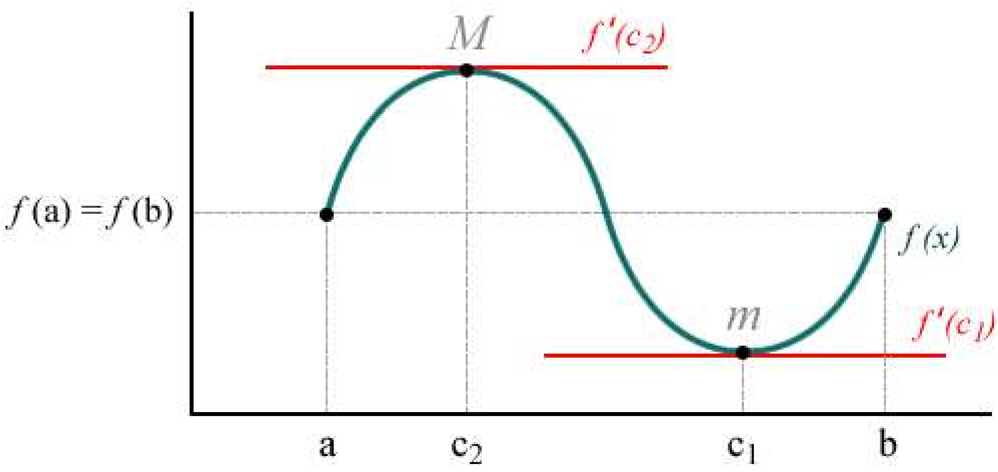
TEOREMA DE ROLLE

Si una función $f(x)$ *es:*

- ***Continua** en el intervalo cerrado* $[a,b]$
- ***Derivable** en el intervalo abierto* (a,b)
- $f(a)=f(b)$

*Entonces existe **al menos** un punto interior c para el cual la derivada se anula, es decir:*

$$\exists c \in (a,b) \,/\, f'(c)=0$$



TEOREMA DE LAGRANGE (O DEL VALOR MEDIO)

Si una función $f(x)$ *es:*

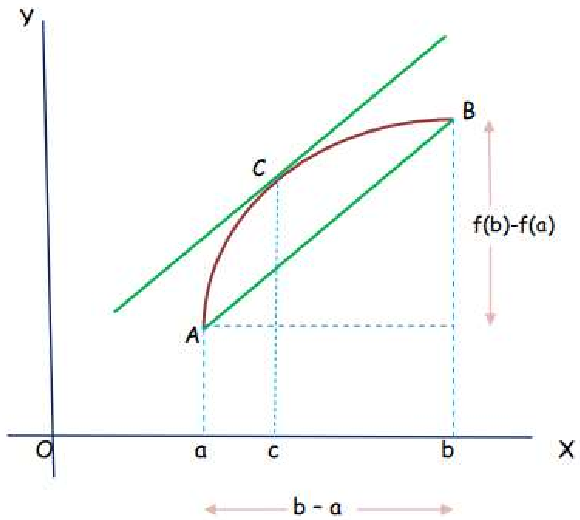
- ***Continua** en el intervalo cerrado* $[a,b]$
- ***Derivable** en el intervalo abierto* (a,b)

*Entonces existe **al menos** un punto interior* $c \in (a,b)$ *tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Lo cual equivale a

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$



Es decir, hay un punto entre a y b donde la recta tangente tiene la misma pendiente que la recta que une los puntos (a, f(a)) y (b, f(b))

TEOREMA DE CAUCHY

Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen que:

- ***Continuas*** *en el intervalo cerrado* $[a,b]$
- ***Derivables*** *en el intervalo abierto* (a,b)
- $g(a) \neq g(b)$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Entonces existe ***al menos*** *un punto interior* $c \in (a,b)$ *tal que:*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

CÁLCULO DE LÍMITES

¿Cómo calcularíamos, por ejemplo, el siguiente límite?

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$$

Una de las técnicas que ya conocemos para resolverlo es la aplicación de **INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES.**

Los **infinitésimos equivalentes** son funciones que en un entorno de cierto punto se comportan de forma similar.

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

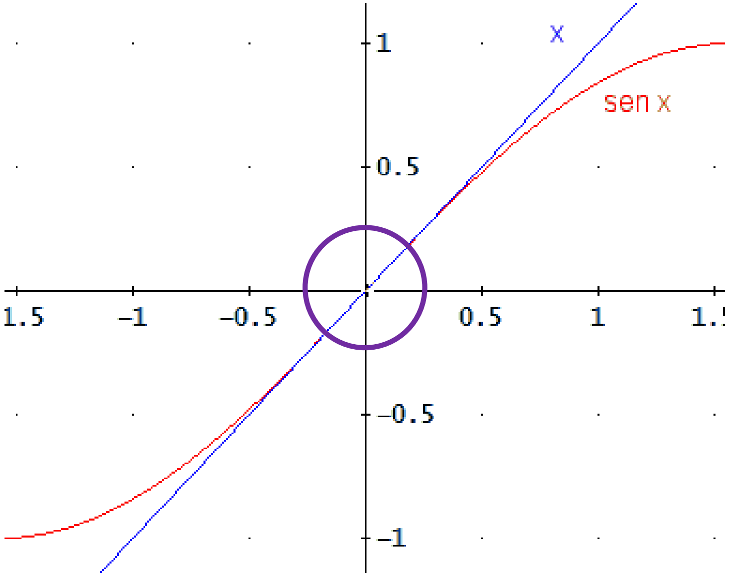


Tabla de infinitésimos equivalentes

$x \to 0$	
$\sin x$	x
$tg\ x$	
$\arcsin x$	
$arctg\ x$	
$e^x - 1$	
$Ln(1+x)$	
$1 - \cos x$	$\dfrac{x^2}{2}$

$x \to 1$	
$Ln\ x$	$x - 1$
$\sin(x-1)$	

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \approx \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} \approx \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = 0$$

CÁLCULO DE LÍMITES

¿Cómo calcularíamos, por ejemplo, el siguiente límite?

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$$

Otra de las técnicas disponibles es el **TEOREMA DE L'HÔPITAL:**

Nos permite resolver límites que se reducen a las indeterminaciones:

$$\boxed{\frac{0}{0}} \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

CÁLCULO DE LÍMITES

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

Podemos aplicar el **TEOREMA DE L'HÔPITAL:**

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

Podemos aplicar el **TEOREMA DE L'HÔPITAL:**

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

CÁLCULO DE LÍMITES

RECORDAR que la técnica de L'Hôpital **sólo** se puede aplicar cuando se nos presentan las indeterminaciones:

$$\boxed{\frac{0}{0}} \qquad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

Ahora podremos también resolver otras indeterminaciones que hasta el momento habíamos pasado por alto:

$$\boxed{0 \cdot \infty} \qquad \boxed{0^{0}} \qquad \boxed{\infty^{0}}$$

CÁLCULO DE LÍMITES

$0 \cdot \infty$	***Se trasforma*** *en una indeterminación del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ *expresando el producto* ***como un cociente***: $$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$	$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot tg\ x \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{tg\ x}{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}} =$$ $$\overset{L'Hopital}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} -\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2 x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$ $$\overset{L'Hopital}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} -\frac{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2\cos x \cdot (-\sin x)} =$$ $$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2\cos x \cdot \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$ $$\overset{L'Hopital}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2}{2\cos 2x} = \frac{2}{-2} = -1$$

CÁLCULO DE LÍMITES

0^0	Se resuelve mediante **derivación logarítmica**. Aplicamos logaritmos y se resuelve el límite del logaritmo. $A = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \Rightarrow$ $\Rightarrow Ln\ A = \lim_{x\to a} g(x)\cdot Ln\ f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow A = e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot Ln\ f(x)}$	$A = \lim_{x\to 0} x^{\sin x} \overset{0^0}{\Rightarrow} Ln\ A = \lim_{x\to 0} Ln\ x^{\sin x} \Rightarrow$ $\Rightarrow Ln\ A = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot Ln\ x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{Ln\ x}{\dfrac{1}{\sin x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$ $\overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} -\dfrac{\sin x}{x\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$ $\overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to 0} -\dfrac{\cos x}{\cos x - x\sin x} = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow Ln\ A = -1 \Rightarrow A = e^{-1} \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^{-1}$

CÁLCULO DE LÍMITES

∞^0	Se resuelve mediante **derivación logarítmica**. Aplicamos logaritmos y se resuelve el límite del logaritmo. $A = \underset{x\to a}{Lim}\ f(x)^{g(x)} \Rightarrow$ $\Rightarrow Ln\ A = \underset{x\to a}{Lim}\ g(x)\cdot Ln\ f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow A = e^{\underset{x\to a}{Lim}\ g(x)\cdot Ln\ f(x)}$	$A = \underset{x\to 0}{Lim}\left(\frac{1}{x}\right)^{x} \overset{\infty^0}{\Rightarrow} Ln\ A = \underset{x\to 0}{Lim}\ Ln\left(\frac{1}{x}\right)^{x} \Rightarrow$ $\Rightarrow Ln\ A = \underset{x\to 0}{Lim}\ x\cdot Ln\left(\frac{1}{x}\right) \overset{0\cdot\infty}{=} \underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{Ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$ $\overset{L'Hopital}{=} \underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{\frac{-1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{x^2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \underset{x\to 0}{Lim}\ x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Ln\ A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1 \Rightarrow \underset{x\to 0}{Lim}\left(\frac{1}{x}\right)^{x} = 1$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Los problemas de optimización son problemas donde el objetivo consiste en **maximizar o minimizar** algún aspecto determinado.

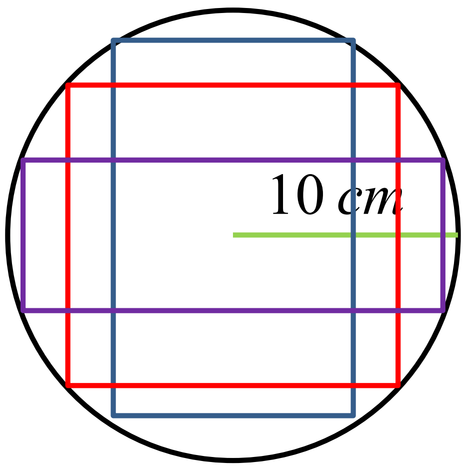
Con las derivadas podemos resolver problemas donde se desea optimizar (maximizar o minimizar) una función que denominaremos **FUNCIÓN OBJETIVO**.

La **dificultad** de estos problemas estriba, en la mayoría de las ocasiones, en la **construcción de la función objetivo** que deseamos optimizar.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Ejemplo: Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

PASO 1: Realizar una representación gráfica, si es posible, de la situación descrita en el problema.



De todos los posibles rectángulos que pueden trazarse, queremos el de área máxima.

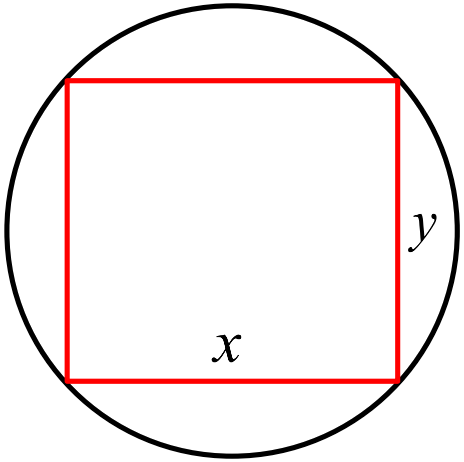
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

<u>PASO 2</u>: Identificar aquello que deseamos optimizar (hacer máximo o mínimo). En el caso que nos ocupa, se trataría del **área de un rectángulo**.

<u>PASO 3</u>: Crear las variables necesarias que pueden interesarnos y construir la función objetivo.

El área de un rectángulo depende de la longitud de la base y su altura. Así pues:

$$x \equiv longitud\ \ de\ la\ base\ del\ rectángulo$$
$$y \equiv longitud\ \ de\ la\ altura\ del\ rectángulo$$

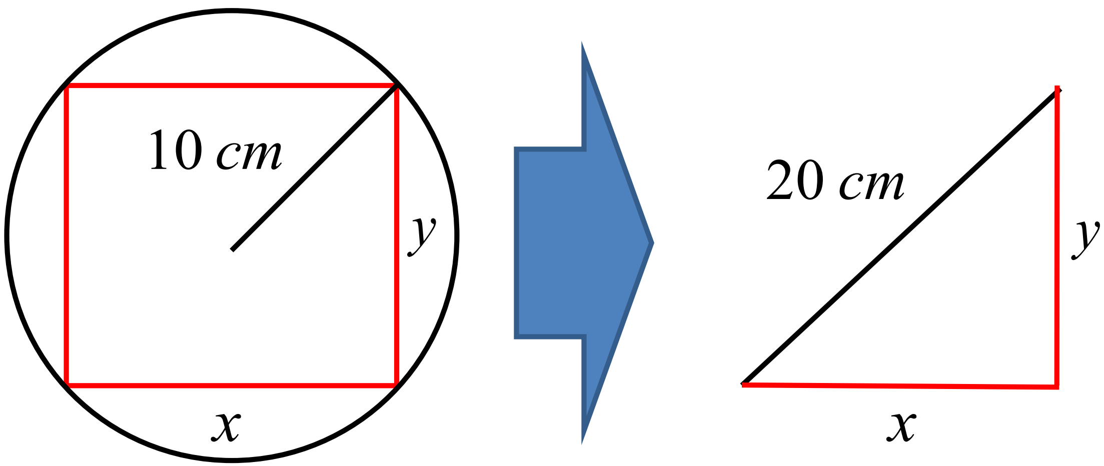


Esto nos permite construir la función objetivo de nuestro problema:

$$\boxed{A(x,y) = x \cdot y}$$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

<u>PASO 4</u>: Buscar una relación entre las variables que hemos creado. A esta relación se le suele conocer como **<u>CONDICIÓN DE LIGADURA</u>**.



Teorema de Pitágoras

$$\boxed{x^2 + y^2 = 400}$$

<u>PASO 5</u>: Despejar de la condición de ligadura una de las variables y sustituirla en la función objetivo:

$$x^2 + y^2 = 400 \;\Rightarrow\; y = \sqrt{400 - x^2}$$

$$A(x, y) = x \cdot y$$

$$\boxed{A(x) = x \cdot \sqrt{400 - x^2}}$$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

<u>PASO 6</u>: Ahora que la función objetivo depende de una única variable, podemos derivarla y extraer los máximos/mínimos.

$$A(x) = x \cdot \sqrt{400 - x^2} \Rightarrow A'(x) = \sqrt{400 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}}$$

$$\Rightarrow A'(x) = \sqrt{400 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = \frac{400 - x^2 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = \boxed{\frac{400 - 2x^2}{\sqrt{400 - x^2}}}$$

Igualamos la derivada a cero, y extraemos los **PUNTOS CRÍTICOS**

$$\frac{400 - 2x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = 0 \Rightarrow 400 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 400 \Rightarrow x = \pm\sqrt{200}$$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

En este caso, el valor de x no puede ser negativo porque no tendría sentido una distancia negativa. Así pues nos centraremos únicamente en comprobar si la solución positiva obtenida se corresponde con un máximo.

$$\boxed{A'(x)=\frac{400-2x^2}{\sqrt{400-x^2}}}$$

$0 \qquad +\sqrt{200} \qquad 200$

SIGNO DE LA DERIVADA	$+$	$-$
MONOTONÍA DE LA FUNCIÓN	↗	↘

MÁXIMO RELATIVO

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

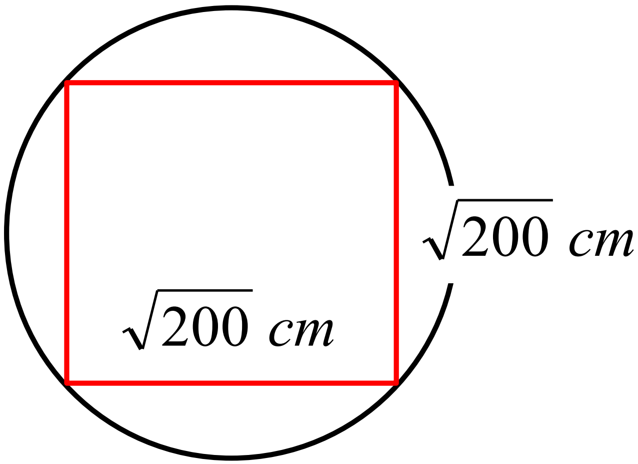
PASO 7: Proporcionar claramente la solución al problema.

Para el valor de $x = \sqrt{200}$ la función $A(x)$ alcanza un máximo relativo. Así pues:

$$y = \sqrt{400 - x^2} \Rightarrow y = \sqrt{400 - \left(\sqrt{200}\right)^2} \Rightarrow y = \sqrt{200}$$

El rectángulo de máxima área que puede inscribirse en una circunferencia de radio 10 cm tendrá las siguientes dimensiones:

$$Base: \ x = \sqrt{200} \ cm$$
$$Altura: \ y = \sqrt{200} \ cm$$



Es decir, en realidad se trata de un cuadrado de lado $\sqrt{200} \ cm$ y su área será:

$$A = \left(\sqrt{200}\right)^2 cm^2 = 200 \ cm^2$$