DOSSIER SEMANAL 6

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Realiza un estudio de la monotonía y curvatura de la función:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Como paso previo al estudio de la monotonía y curvatura de la función, estudiaremos su dominio. En este caso, se trata de una función racional y por tanto su dominio estará formado por todos aquellos valores reales que no anulen el denominador:

$$D[f(x)]=R-\{-1,1\}$$

Estudiemos ahora la monotonía y curvatura de la función.

MONOTONÍA

Para el estudio de la monotonía debemos calcular la primera derivada de la función:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-1)-2x\cdot(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\cdot[(x^2-1)-(x^2+1)]}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Para obtener los puntos críticos, igualaremos la derivada a cero y resolveremos la ecuación resultante:

$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-4x}{(x^2-1)^2}=0 \quad\Rightarrow\quad -4x=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

Estudiemos ahora la monotonía. Recordemos que deberemos tener en cuenta los puntos críticos obtenidos así como el dominio de la función:

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
Signo de f'(x)	+	+	-	-
Monotonia de f(x)	↗	↗	↘	↘

La función es creciente en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y decreciente en $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Además presenta un máximo relativo en el punto:

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad f(0)=\frac{0^2+1}{0^2-1}=-1 \quad \Rightarrow \quad A\,(0,-1)$$

CURVATURA

Para el estudio de la curvatura debemos calcular la segunda derivada de la función:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x)=\frac{-4\cdot\left(x^2-1\right)^2+4x\cdot 2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x)=\frac{\left(x^2-1\right)\cdot\left[-4\cdot\left(x^2-1\right)+16x^2\right]}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{4+12x^2}{\left(x^2-1\right)^3}$$

Para obtener los puntos críticos, igualaremos la derivada a cero y resolveremos la ecuación resultante:

$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4+12x^2}{\left(x^2-1\right)^3}=0 \quad \Rightarrow \quad 4+12x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x\notin R$$

Estudiemos ahora la curvatura. Nuevamente deberemos tener presente el dominio y los puntos críticos obtenidos de la segunda derivada (que en este caso no hay ninguno):

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
Signo de f''(x)	**+**	**-**	**+**
Curvatura de f(x)			

La función es convexa en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y cóncava en $(-1,1)$. La función no posee puntos de inflexión ya que la curvatura cambia en los puntos donde la función no está definida.

PROBLEMA 2: Determina el valor de los parámetros reales a, b y c para que pueda aplicarse el Teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & -2 \le x < 0 \\ c + \sqrt{x+1} & 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

Enunciaremos primeramente el Teorema de Rolle para dejar constancia de sus premisas y su tesis o conclusión:

Sea una función $f(x)$ definida en $[a, b]$ que verifica las siguientes tres condiciones:

- $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- $f(x)$ es una función derivable en el intervalo abierto (a, b)
- $f(a) = f(b)$

Entonces existe un punto c interior del intervalo (a, b) donde la derivada de la función se anula, expresándolo matemáticamente:

$$\exists c \in (a, b) \,|\, f'(c) = 0$$

Así pues, **vamos ahora a calcular el valor de los parámetros reales a, b y c para que se cumplan las tres premisas del Teorema de Rolle**. Como puede comprobarse fácilmente, el dominio de la función propuesta en este caso es $[-2, 3]$. Obsérvese que para $0 < x \le 3$ la función $f(x) = c + \sqrt{x+1}$ no presenta problemas de dominio ya que está definida siempre que $x \in [-1, +\infty)$.

La función $f(x)$ debe ser **<u>continua</u>** en el intervalo $[-2, 3]$. Observamos que:

- Para $-2 \le x < 0$: la función $f(x) = ax^2 + bx$ que es continua en R por ser un polinomio. En particular, será continua en $-2 \le x < 0$.
- Para $0 < x \le 3$: la función $f(x) = c + \sqrt{x+1}$ es continua en $x \in [-1, +\infty)$. Así pues, en particular será continua en $0 < x \le 3$.

Por tanto, el único punto en el que debemos prestar especial detalle para la continuidad es en el punto de cambio $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=c+\sqrt{0+1}=c+1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} c+\sqrt{x+1}=c+1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} ax^2+bx=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c+1=0 \quad \Rightarrow \quad c=-1$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en $[-2,3]$, debe cumplirse que $c=-1$.

Ahora bien, la función $f(x)$ también debe ser **derivable** $(-2,3)$:

- Para $-2<x<0$: la función $f(x)=ax^2+bx$ que es derivable en R por ser un polinomio. En particular, será derivable en $-2<x<0$.
- Para $0<x<3$: la función $f(x)=c+\sqrt{x+1}$ es derivable en $x\in[-1,+\infty)$. Así pues, en particular será derivable en $0<x<3$.

Por tanto, el único punto en el que debemos prestar especial detalle para la derivabilidad es en el punto de cambio $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & -2\le x<0 \\ c+\sqrt{x+1} & 0\le x\le 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & -2<x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & 0<x<3 \end{cases}$$

Las derivadas laterales en deben coincidir para asegurar la derivabilidad de $f(x)$ en el intervalo abierto $(-2,3)$. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0+)=\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{0+1}}=\dfrac{1}{2} \\ f'(0-)=\lim\limits_{x\to 0-} f'(x)=2a\cdot 0+b=b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(0+)=f'(0-) \quad \Rightarrow \quad b=\frac{1}{2}$$

Para que la función $f(x)$ sea derivable en $(-2,3)$, debe cumplirse que $b=\dfrac{1}{2}$.

La tercera condición que debe verificar la función $f(x)$ es que $f(-2) = f(3)$. Es decir:

$$f(-2) = f(3) \quad \Rightarrow \quad 4a - 2b = c + \sqrt{3+1} \quad \Rightarrow \quad 4a - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 4a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Conclusión del problema: **Para que pueda aplicarse el Teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$ debe cumplirse que $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ y $c = -1$.**

PROBLEMA 3: Determina si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente tu respuesta:

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=3xe^{-x}$ que pasa por su punto de corte con el eje de abscisas es $y=3x$.

b) Si una función $f(x)$ es derivable y verifica que $f'(a)=0$, entonces podemos decir que $f(x)$ presenta un máximo o mínimo relativo en $x=a$.

c) No existen dos funciones distintas que tengan la misma función derivada.

d) Si una función tiene derivada positiva en todos sus puntos, entonces dicha función es positiva.

e) La ecuación $4x^5+3x+1=0$ tiene una única solución en el intervalo $(-1,1)$.

a) **VERDADERO**. El punto de corte de la función con el eje de abscisas es:

$$f(x)=3xe^{-x}=0 \quad \Rightarrow \quad 3xe^{-x}=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

Si calculamos ahora la ecuación de la recta tangente a la función que pasa por este punto:

$$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$$

Vemos que:

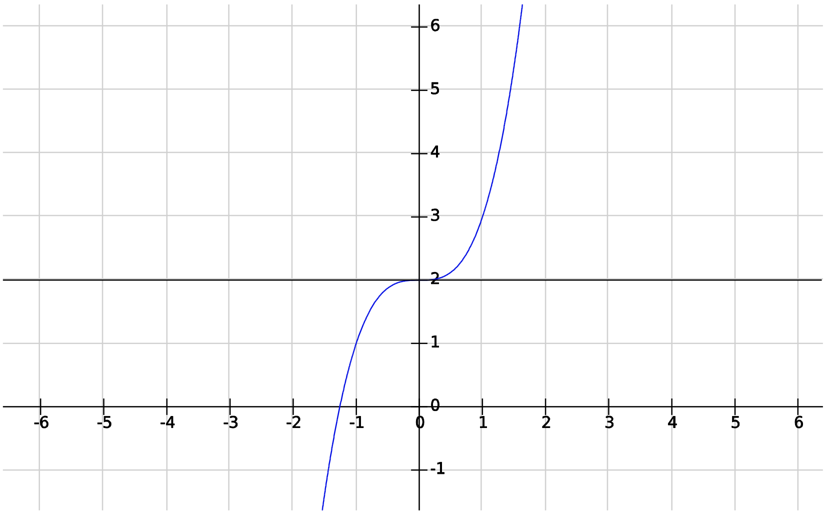
$$f(x)=3xe^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=3e^{-x}+3xe^{-x}\cdot(-1)=3e^{-x}-3xe^{-x}=3\cdot(1-3x)\cdot e^{-x}$$

$$f(x)=3xe^{-x} \quad \Rightarrow \quad f(0)=0$$
$$f'(0)=3\cdot(1-3\cdot 0)\cdot e^{-0}=3$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$y-0=3\cdot(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=3x$$

b) **FALSO**. Recordemos que para que un punto de una función sea máximo o mínimo su derivada en dicho punto debe ser cero pero no todos aquellos puntos donde la derivada se anula han de ser necesariamente máximos o mínimos de la función. Basta considerar la función $f(x)=x^3+2$. Observemos que ocurre en para $x=0$ esta función:



$$f(x) = x^3 + 2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x^2 \;\Rightarrow\; 2x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
Signo de f'(x)	+		+
Monotonia de f(x)	$\nearrow$		$\nearrow$

Como puede apreciarse la derivada de la función en x=0 es cero, pero en este punto no hay ni un máximo ni un mínimo relativo.

c) **FALSO.** Basta considerar las rectas $f(x) = 2x+1$ y $g(x) = 2x-5$. Dichas funciones son distintas pero ambas poseen exactamente la misma función derivada.

d) **FALSO**. Si una función tiene derivada positiva en todos sus puntos implica que la función es siempre creciente, pero no tiene porqué ser positiva. Basta considerar por ejemplo la función $f(x) = x$. Su derivada es:

$$f'(x) = 1 > 0 \quad \forall x \in R$$

pero para $x < 0$ la función es negativa.

e) **VERDADERO**. Primeramente comprobaremos que posee alguna solución aplicando el Teorema de Bolzano. Para ello, definimos la función:

$$f(x) = 4x^5 + 3x + 1$$

Podemos ver que:

- La función $f(x)$ es continua en todo R por ser un polinomio y en consecuencia será continua en cualquier intervalo cerrado que consideremos. En particular lo será en $[-1, 1]$.
- Vemos que toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo sugerido:

$$f(-1) = -4 - 3 + 1 = -6 < 0$$
$$f(1) = 4 + 3 + 1 = 8 > 0$$

Así pues, por el Teorema de Bolzano podemos concluir que:

$$\exists c \in (-1, 1) \,|\, f(c) = 0$$

Para demostrar que la solución es única podemos recurrir a dos tácticas:

<u>OPCIÓN 1</u>: Utilizar la técnica de **<u>demostración por reducción al absurdo</u>**.

Supongamos que existen dos soluciones distintas en el intervalo $(-1, 1)$ **de la ecuación propuesta** que llamaremos c_1 y c_2.

Por ser soluciones, sabemos que verificarán la ecuación, es decir:

$$f(c_1) = 0 \text{ y } f(c_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c_1) = f(c_2)$$

Así pues, observamos que:

- La función $f(x)$ es continua en R y en particular lo será en el intervalo cerrado $[c_1, c_2]$.
- La función $f(x)$ es un polinomio. En consecuencia es derivable en R y en particular lo será en el intervalo abierto (c_1, c_2).
- Además, como hemos visto, se verifica que: $f(c_1) = f(c_2)$

Por tanto, dado que se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle podemos afirmar que:

$$\exists d \in (c_1, c_2) \mid f'(d) = 0$$

Ahora bien, por otro lado, si calculamos la derivada de $f(x)$ y la igualamos a cero se observa que:

$$f(x) = 4x^5 + 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 20x^4 + 3 \quad \Rightarrow \quad 20x^4 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[4]{\frac{-3}{20}} \notin R$$

Es decir, no existe ningún punto de donde la derivada de $f(x)$ se anule. Esto entra en contradicción con lo que acabamos de deducir por el Teorema de Rolle.

Observamos que, tras suponer que existían dos soluciones distintas de la ecuación propuesta en el intervalo $(-1, 1)$ hemos llegado a una contradicción lógica. Por tanto, no nos queda más remedio que concluir que nuestra suposición inicial era falsa.

Por todo ello, podemos asegurar que la ecuación $4x^5 + 3x + 1 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-1, 1)$.

<u>OPCIÓN 2</u>: Analizar la monotonía de la función $f(x) = 4x^5 + 3x + 1$.

La función $f(x)$ es polinómica y en consecuencia su dominio es todo el conjunto de los números reales. Si estudiamos la monotonía de la función, observamos que:

$$f(x) = 4x^5 + 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 20x^4 + 3 \quad \Rightarrow \quad 20x^4 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[4]{\frac{-3}{20}} \notin R$$

Es decir, la función $f(x)$ no posee puntos críticos. Ello nos lleva a:

	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
Signo de f'(x)	**+**
Monotonia de f(x)	$\nearrow$

Es decir, **la función $f(x)$ siempre es creciente**. Ello implica que en el intervalo $(-1,1)$ (donde hemos probado que existe al menos una solución) también será creciente. Así pues, la función no puede cortar más de una vez al eje OX porque una vez lo ha cortado, como continúa creciendo no hay posibilidad de que pueda volver a pasar por él.

Por todo ello, podemos asegurar que la ecuación $4x^5+3x+1=0$ tiene una única solución en el intervalo $(-1,1)$.