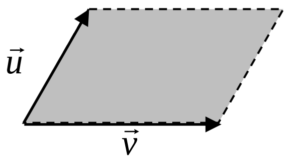
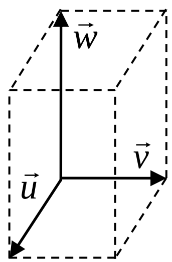
MATEMÁTICAS II

RESUMEN: BLOQUE DE GEOMETRÍA

*A continuación, se presenta un resumen de los contenidos referentes al bloque de geometría analítica en el espacio. Este documento deberá entenderse como una **herramienta de apoyo**. En ningún momento se considerará como base teórica.*

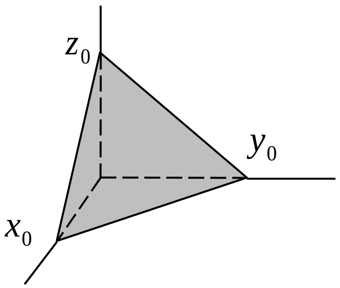
VECTORES

Operación	Cómo calcular	Algunas propiedades	Interpretación geométrica
Producto escalar	$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{v}\rVert\cdot\cos\alpha$	• Es un **número** • $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$	• Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$ (son **perpendiculares**)
Norma o módulo	$\lVert\vec{u}\rVert=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$	• Es un **valor no negativo** • $\lVert\vec{u}\rVert^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$	• Representa la **longitud** del vector $\vec{u}$
Producto vectorial	$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$	• Es un **vector perpendicular** a los vectores que se multiplican. • Su sentido viene dado por la *"regla del tornillo"* • Su módulo es: $\lVert\vec{u}\times\vec{v}\rVert=\lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{v}\rVert\cdot sen\alpha$ • $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$	• Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos: $\vec{u}\times\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$ (son **paralelos**) • **Su módulo es el área** del paralelogramo generado por ambos vectores. 
Producto mixto	$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$	• Es un **número** • Es un determinante, por lo que sus propiedades son las mismas que las de estos.	• El valor absoluto del producto mixto equivale al **volumen** del paralelepípedo generado por los 3 vectores 

ECUACIONES DEL PLANO

Para determinar la ecuación de un plano deberemos disponer de uno de los siguientes grupos de elementos:

1)	***Tres puntos** del plano*	*2)*	***Dos vectores** directores del plano y **un punto** de éste*	*3)*	*Un **vector normal** al plano y **un punto** de éste*

<table>
<tr><th>ECUACIÓN</th><th>EXPRESIÓN ANALÍTICA</th><th>UN PUNTO</th><th>VECTORES DIRECTORES</th><th>VECTOR NORMAL</th></tr>
<tr><td>Vectorial</td><td>$(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda\cdot(u_1,u_2,u_3)+\mu\cdot(v_1,v_2,v_3)$</td><td rowspan="2">$P=(a,b,c)$</td><td rowspan="2">$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$
$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$</td><td rowspan="2">$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$</td></tr>
<tr><td>Paramétrica</td><td>$\begin{cases} x=a+\lambda\cdot u_1+\mu\cdot v_1 \\ y=b+\lambda\cdot u_2+\mu\cdot v_2 \\ z=c+\lambda\cdot u_3+\mu\cdot v_3 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>General o Implícita</td><td>$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow Ax+By+Cz+D=0$</td><td>Dar valores a dos de las incógnitas y despejar la tercera</td><td rowspan="2">Extraer dos puntos y restarlos para obtener un vector director o pasar la ecuación a paramétricas</td><td>$\vec{n}=(A,B,C)$</td></tr>
<tr><td>Segmentaria</td><td>$\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{y}{y_0}+\dfrac{z}{z_0}=1$
</td><td>$P=(x_0,0,0)$
$P=(0,y_0,0)$
$P=(0,0,z_0)$</td><td>$\vec{n}=(y_0z_0,x_0z_0,x_0z_0)$</td></tr>
</table>

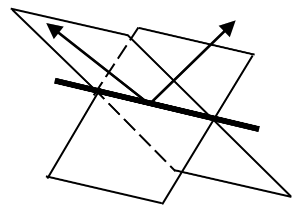
ECUACIONES DE LA RECTA

Para determinar la ecuación de una recta deberemos disponer de uno de los siguientes grupos de elementos:

1)	***Dos puntos** de la recta*	*2)*	*Un **vector director** de la recta y **un punto** de ésta*

<table>
<tr><th>ECUACIÓN</th><th>EXPRESIÓN ANALÍTICA</th><th>UN PUNTO</th><th>VECTOR DIRECTOR</th><th>VECTOR NORMAL</th></tr>
<tr><td>Vectorial</td><td>$(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda\cdot(u_1,u_2,u_3)$</td><td rowspan="3">$P=(a,b,c)$</td><td rowspan="3">$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$</td><td rowspan="3">Una recta tiene infinitos vectores normales. Si deseamos obtener uno, basta con calcular uno que cumpla que $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$
Si, por ejemplo hacemos $u_3\neq 0$
$\vec{n}=\left(0,1,-\frac{u_2}{u_3}\right)$</td></tr>
<tr><td>Paramétrica</td><td>$\begin{cases} x=a+\lambda\cdot u_1 \\ y=b+\lambda\cdot u_2 \\ z=c+\lambda\cdot u_3 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Continua</td><td>$\frac{x-a}{u_1}=\frac{y-b}{u_2}=\frac{z-c}{u_3}$</td></tr>
</table>

Una recta puede también expresarse como intersección de dos planos secantes. Para obtener dos de estos planos, simplemente hemos de seleccionar un par de igualdades de la ecuación continua y expresarlas en forma general.

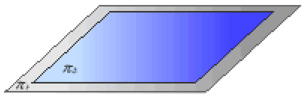
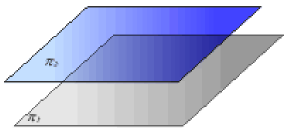
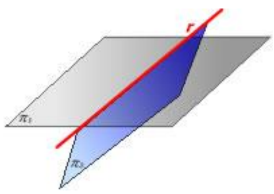
ECUACIÓN	EXPRESIÓN ANALÍTICA	UN PUNTO	VECTOR DIRECTOR
Como intersección de dos planos	$\left.\begin{array}{l} \frac{x-a}{u_1}=\frac{y-b}{u_2} \\ \frac{y-b}{u_2}=\frac{z-c}{u_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$	*Dar valor a **una** de las incógnitas y despejar las otras dos restantes*	*Multiplicando vectorialmente los vectores normales de los planos:* $\vec{u}=(A,B,C)\times(A',B',C')$ 

POSICIONES RELATIVAS EN EL ESPACIO

*Para determinar la posición relativa de dos o más cuerpos (rectas o planos) en el espacio, simplemente deberá discutirse el **sistema formado por las ecuaciones de cada uno de los objetos** y relacionarlos con la posición adecuada. No obstante, en algunas ocasiones existen técnicas más rápidas y sencillas que nos permiten averiguar la posición relativa de diversos cuerpos sin recurrir a la discusión del sistema.*

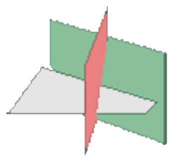
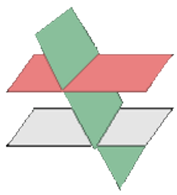
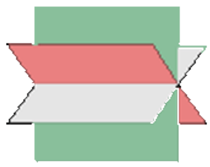
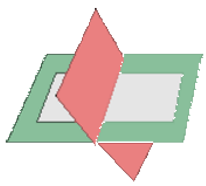
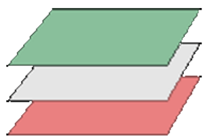
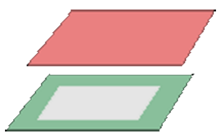
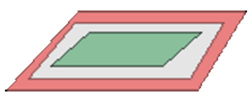
1. Posición relativa de dos planos

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0\end{array}\right\}$$

POSICIÓN	DISCUSIÓN DEL SISTEMA	OTRO MÉTODO	REPRESENTACIÓN
Coincidentes	$Rg(A) = Rg(A^*) = 1$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	
Paralelos	$Rg(A) \neq Rg(A^*)$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	
Secantes	$Rg(A) = Rg(A^*) = 2$	En otro caso	

2. **<u>Posición relativa de tres planos</u>:**

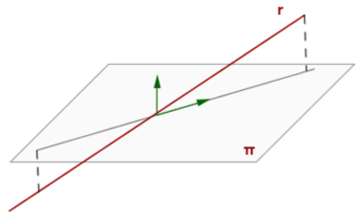
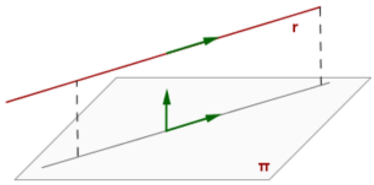
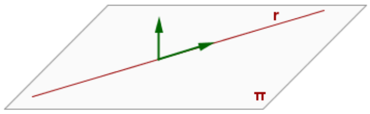
$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi_3 \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0\end{array}\right\}$$

$Rg(A)$	$Rg(A^*)$	**POSICIÓN**	**REPRESENTACIÓN**
3	3	Los planos se cortan en un único punto (forman un **triedro**)	
2	3	Planos **secantes dos a dos**	 
2	2	Los planos **se cortan en una recta**	 
1	2	Planos paralelos o dos coincidentes y el restante paralelo	 
1	1	Planos **coincidentes**	

3. **Posición relativa de recta-plano**

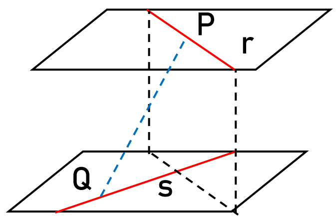
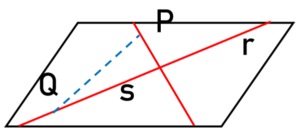
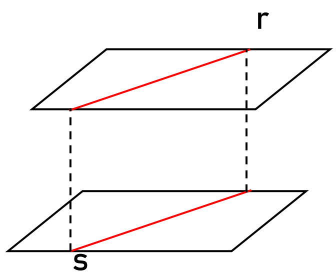
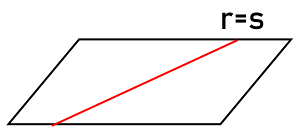
$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

POSICIÓN	**DISCUSIÓN DEL SISTEMA**	**OTRO MÉTODO** $\vec{n} \equiv normal\ del\ plano$ $\vec{u} \equiv director\ de\ la\ recta$	**REPRESENTACIÓN**
Secantes	$Rg(A) = Rg(A^*) = 3$	$\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$	
Paralelos	$Rg(A) \neq Rg(A^*)$	$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ y un punto de r no está en el plano π	
Recta contenida en el plano	$Rg(A) = Rg(A^*) = 2$	$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ y un punto de r está en el plano π	

4. **<u>Posición relativa de dos rectas</u>**:

$$r_1 \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$$

POSICIÓN	**DISCUSIÓN DEL SISTEMA**	**OTRO MÉTODO** $\vec{u} \equiv director\ de\ la\ recta\ r_1$ $\vec{v} \equiv director\ de\ la\ recta\ r_2$ $\vec{w} \equiv \overrightarrow{PQ}$		**REPRESENTACIÓN**
Se cruzan	$Rg(A^*) = 4$	$\vec{u}$ y $\vec{v}$ **<u>no</u>** son **proporcionales**	$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$	
Secantes	$Rg(A) = Rg(A^*) = 3$		$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$	
Paralelas	$Rg(A) \neq Rg(A^*) < 4$	$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **proporcionales**	Un punto de la primera recta **<u>no</u> estará** en la otra	
Coincidentes	$Rg(A) = Rg(A^*) = 2$		Un punto de la primera recta **<u>siempre</u> estará** en la otra	

ELEMENTOS MÉTRICOS

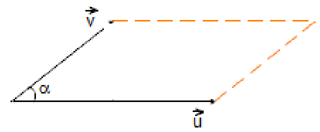
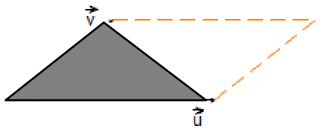
1. Distancias

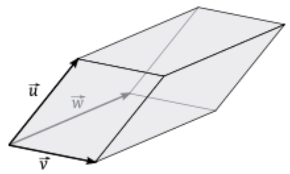
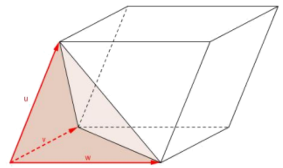
Posición	Ecuaciones	Fórmula	Por construcción
Punto-punto	$P(a,b,c)$ $Q(a',b',c')$	$d(P,Q)=\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert=\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(c'-c)^2}$	1. Calcular el módulo del vector que une los puntos.
Punto-plano	$P(a,b,c)$ $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$	$d(P,\pi)=\frac{\lvert A\cdot a+B\cdot b+C\cdot c+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	1. Hallar la recta r perpendicular a π que pasa por P 2. Hallar el punto Q intersección de r y π 3. Distancia entre P y Q
Punto-recta	$P(a,b,c)$ $r \equiv \vec{x}=Q+\lambda\cdot\vec{u}$	$d(P,r)=\frac{\lvert\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}\rvert}{\lVert\vec{u}\rVert}$	1. Hallar el plano π perpendicular a r que pasa por P 2. Hallar el punto Q intersección de r y π 3. Distancia entre P y Q
Dos rectas que se cruzan	$r \equiv \vec{x}=P+\lambda\cdot\vec{u}$ $s \equiv \vec{x}=Q+\mu\cdot\vec{v}$	$d(r,s)=\frac{\lvert[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}]\rvert}{\lVert\vec{u}\times\vec{v}\rVert}$	1. Hallar la recta t perpendicular común de r y s 2. Hallar el punto P intersección de r y t 3. Hallar el punto Q intersección de s y t 4. Distancia entre P y Q

2. Ángulos: El cálculo del ángulo sólo tiene sentido si los cuerpos en el espacio se cortan o se cruzan.

Angulo entre **dos rectas**	Ángulo entre **dos planos**	Ángulo entre **recta y plano**
$\vec{u} \equiv director\ de\ la\ recta\ r$ $\vec{v} \equiv director\ de\ la\ recta\ s$	$\vec{n} \equiv normal\ del\ plano\ \pi$ $\vec{m} \equiv normal\ del\ plano\ \sigma$	$\vec{u} \equiv director\ de\ la\ recta\ r$ $\vec{n} \equiv normal\ del\ plano\ \pi$
$\cos(\alpha)=\frac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{v}\rvert}{\lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{v}\rVert}$	$\cos(\alpha)=\frac{\lvert\vec{n}\cdot\vec{m}\rvert}{\lVert\vec{n}\rVert\cdot\lVert\vec{m}\rVert}$	$\mathrm{sen}(\alpha)=\frac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{n}\rvert}{\lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{n}\rVert}$

3. Áreas y volúmenes

Área	Fórmula	Representación
Paralelogramo	$A = \lVert \vec{u} \times \vec{v} \rVert$	
Triángulo	$A = \dfrac{\lVert \vec{u} \times \vec{v} \rVert}{2}$	

Volumen	Fórmula	Representación
Paralelepípedo	$V = \lvert [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \rvert$	
Tetraedro	$V = \dfrac{\lvert [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \rvert}{6}$	

7 PROBLEMAS ESENCIALES

1. **PROYECCIONES** (vector sobre otro vector, punto sobre recta, punto sobre plano y recta sobre plano)
2. Hallar el **PLANO QUE CONTIENE A DOS RECTAS**.
3. Hallar el **SIMÉTRICO** de un punto sobre un plano o sobre una recta.
4. Hallar la **RECTA PERPENDICULAR A OTRA RECTA**
5. Hallar la RECTA **PERPENDICULAR COMÚN** A OTRAS DOS RECTAS
6. Hallar el **LUGAR GEOMÉTRICO** que cumple una determinada condición
7. Hallar la **RECTA QUE SE APOYA EN OTRAS DOS RECTAS**